

РЕЦЕНЗИЯ

на диссертационную работу Ульбрихт Ольги Ивановны
на тему «Классификация моделей йонсоновских теорий относительно косемантической эквивалентности», представленной на соискание степени доктора
философии (PhD) по специальности 6D060100 — «Математика»

1. Актуальность темы исследования и ее связь с общенаучными и общегосударственными программами. Диссертант в своей диссертационной работе рассматривает ряд специальных теоретико-модельных вопросов для йонсоновских теорий. Йонсоновские теории образуют достаточно широкий подкласс индуктивных теорий, изучение которых выделяет большой исторический пласт в развитии классической теории моделей. Основоположником изучения данного направления является известный специалист теории моделей и один из её основателей — Абрахам Робинсон. Известно, что йонсоновские теории не обязаны быть полными. С одной стороны, современная теория моделей в большей своей части ориентирована на изучение полных теорий, с другой стороны, большое количество естественных классов алгебраических структур имеет неполную теорию, так, например, йонсоновскими теориями являются класс полей фиксированной характеристики, класс групп, класс абелевых групп, различные классы различных типов колец, булевых алгебр, решёток, полигонов. Впервые особое внимание к изучению теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий и их связей с изучением полных теорий было уделено советским и казахстанским учёным Т. Г. Мустафиным. Также им было замечено, что понятие йонсоновости (быть йонсоновской теорией) является не только семантическим (алгебраическим), как было определено в первоначальном варианте самим Б. Йонсоном, но и синтаксическим. Более того, из замечания Е. А. Палютина, что понятие однородности и универсальности в смысле йонсоновских теорий не влечёт за собой насыщенности, следует, что имеются существенные отличия данного направления теории моделей от полных теорий, где универсальность и однородность эквивалентны насыщенности. В связи с этим фактом Т. Г. Мустафиным было определено понятие совершенной йонсоновской теории, когда универсальность и однородность в йонсоновском смысле влекут насыщенность. Учителем Т. Г. Мустафина А. Р. Ешкеевым был найден критерий совершенности йонсоновской теории на языке понятий, определённых в работах А. Робинсона и его последователей. Как правило, дальнейшие результаты, полученные в данной области в рамках изучения совершенных йонсоновских теорий, либо обобщают известные результаты классической теории моделей, либо их уточняют. Классическим примером несовершенной йонсоновской теории является теория групп, теория, которую активно изучают и в классической теории моделей. В представленной диссертации Ольга Ульбрихт рассмотрела два примера алгебр, один из них — это пример совершенной йонсоновской теории (теория абелевых групп), а второй — несовершенной (теория R -модулей). В случае несовершенности, в силу отсутствия модельного компаньона, ситуация становится более сложной, в силу чего необходимо

привлекать новые технические средства. В частности, в диссертации есть результаты, связанные с внедрением в рамки йонсоновских теорий важнейших понятий современной теории моделей для полных теорий, таких как аксиоматические задания ответвляемости (forking) и независимости, и через разновидности понятия независимости приходить к йонсоновскому аналогу простой теории. Поэтому, актуальность задач, рассмотренных в данной диссертации, не вызывает сомнения, она обусловлена и приложениями к классическим алгебраическим структурам, и общими задачами теории моделей.

2. Научные результаты в рамках требования к диссертации.

Данная диссертация представляет собой целостное научное исследование, содержащее достаточно глубокий анализ состояния вопросов в исследуемой области. Диссертация состоит из введения, основных трёх разделов, заключения и списка использованной литературы.

Во введении приведены цель исследования, указаны задачи и краткое содержание полученных результатов. Основной целью данной работы является получение критерия косемантичности абелевых групп и R -модулей, а также адаптация таких понятий для полных теорий, как стабильная теория, простая теория, ответвляемость и независимость для йонсоновской теории.

В первом разделе представленной диссертационной работы приведены основные понятия и результаты классической теории моделей, касающиеся йонсоновских теорий. Также исследованы свойства решёток экзистенциальных формул Δ -йонсоновских теорий и их связь с известными вопросами в теории моделей. Получен ряд результатов, устанавливающих связь между свойствами Δ -йонсоновской теории, центрального пополнения данной Δ -йонсоновской теории и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно этой теории.

В втором разделе рассматриваются теоретико-модельные вопросы классификации теории абелевых групп и теории модулей относительно понятия косемантичности в классе йонсоновских теорий. На языке йонсоновских инвариантов абелевых групп получен йонсоновский аналог известной теоремы В. Шмелёвой об элементарной классификации абелевых групп. Также в данном разделе получен йонсоновский аналог известной теоремы Монка об элементарной эквивалентности R -модулей, который обобщает теорему Монка. В рамках изучения совершенных йонсоновских R -модулей найден критерий счётной категоричности, когда модуль экзистенциально замкнут.

В третьем разделе в рамках изучения йонсоновских подмножеств семантической модели данной йонсоновской теории аксиоматически было определено понятие йонсоновской неответвляемости. Получены результаты, отражающие эквивалентность ответвляемости по Шелаху, Ласкару-Пуазы и аксиоматически заданной ответвляемости. Также было введено понятие J -простой теории и в классе таких теорий получен йонсоновский вариант известной теоремы Кима-Пилляя для класса йонсоновского спектра произвольной модели сигнатуры.

3. Степень обоснованности и достоверности каждого научного результата (научного положения), выводов и заключения соискателя, сформулированных в диссертации.

Обоснованность и достоверность результатов, полученных в диссертационной работе О. И. Ульбрихт, вытекает из строгих математических выкладок — доказательств всех результатов, основана на корректном применении методов классической теории моделей и семантического метода изучения йонсоновских теорий, который заключается в транслировании элементарных свойств первого порядка центра йонсоновской теории на саму йонсоновскую теорию. Теоретические положения диссертации изложены последовательно и обоснованы подробными доказательствами.

4. Степень новизны каждого научного результата (положения), вывода соискателя, сформулированных в диссертации.

В представленной диссертационной работе получены следующие результаты, которые являются новыми:

- найдены необходимые и достаточные условия того, что йонсоновская теория абелевых групп допускает йонсоновский вариант свойства Шрёдера-Бернштейна;
- получен критерий косемантичности абелевых групп, который является йонсоновским вариантом теоремы В. Шмелёвой об элементарной классификации абелевых групп;
- получен критерий косемантичности модулей, который является уточнением теоремы Монка об элементарной эквивалентности модулей в рамках изучения йонсоновских теорий модулей;
- определено понятие ответвляемости для экзистенциальных типов некоторой семантической модели произвольной йонсоновской теории на основе системы аксиом определения ответвляемости в классическом смысле С.Шелаха, а также в парижском варианте в рамках Ласкара-Пуазы;
- в классе J -простых теорий получен йонсоновский вариант теоремы Кима-Пилляя для класса йонсоновского спектра произвольной модели сигнатуры.

5. Практическая и теоретическая значимость полученных результатов.

Работа носит как теоретический, так и прикладной характер. Полученные теоретические результаты могут быть использованы при дальнейших исследованиях теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий и их классов моделей в классической теории моделей и универсальной алгебре. Прикладное значение полученных результатов можно применить во всех областях математики, где является возможным интерпретация абелевой группы или модуля, а также при работе с формализациями онтологий предметных областей, в которых интерпретируются абелевые группы и модули.

Степень новизны научных результатов диссертации и выводов подтверждаются публикациями в рейтинговом журнале, в научных изданиях, реко-

мендовых Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК, а также в материалах международных научных конференций.

6. Замечания, предложения по диссертации. В работе встречаются стилистические и технические ошибки, но они не снижают общий уровень и значимость диссертации и являются лишь замечаниями и пожеланиями автору в дальнейшей работе.

Было бы хорошо использовать перевод англоязычных терминов, например, вместо «форкинг» писать «ответляемость», а вместо «форсинг» — «вынуждение» (страница 5).

Определение 1.2.7. Не понятно, должна ли теория T быть счетной?

В лемма 1.2.2. используется понятие T -экзистенциально замкнутой модели, а было введено только понятие экзистенциально замкнутой модели. Скорее всего, это одно и то же, но было бы лучше указать прямо на это.

В теореме 1.2.6 есть указание на T^0 , но нет описания свойств этой теории.

Формулировки некоторых теорем изложены слишком тяжеловесно. Например, теорему 1.3.3 можно было бы сформулировать так: всякая модель йонсоновской теории вкладывается в экзистенциально замкнутую модель этой теории. По возможности следует избегать обозначений в формулировках теорем.

Определение 1.4.1 косемантичности двух теорий была дано Т. Г. Мустафиным при помощи сильно недостижимого кардинала, в то время как в диссертации используется более слабое требование ω^+ -насыщенности модели. В связи с этим возникает вопрос: а что будет, если потребовать, чтобы семантические модели были изоморфны, а не равны?

В определении фрагментарного совершенного йонсоновского спектра на странице 13 не сказано, что такая модель \mathfrak{M} , догадаться, конечно, можно, но лучше было бы указать это явно.

На странице 19 написано: «Множество Γ называется непротиворечивым или совместным, если оно имеет хоть одну модель.» Было бы лучше написать только «совместным», поскольку «непротиворечивость» — это другое понятие, хоть и эквивалентное.

На странице 28 в определении спектра теории следует добавить «с точностью до изоморфизма».

Следовало бы писать полные доказательства, избегая слов «ясно», «очевидно» и фраз «нетрудно показать», «можно непосредственно проверить» и подобных, поскольку это не статья, а диссертация, где необходимо оценивать навыки самостоятельной работы докторанта.

Страница 30, теорема 1.3.2. Нужно ли требование конечности сигнатуры? Судя по доказательству, нужно. Если все же нет, то в доказательстве следовало бы указать, что конъюнкция может быть и бесконечной. Кроме того, в доказательстве явно не указано, где используется предположение о робинсоновости теории.

В лемме 1.4.2 доказано, что понятие элементарной эквивалентности влечет йонсоновскую элементарную эквивалентность, которая в свою очередь влечет JSp-косемантичность. Было бы хорошо привести примеры, показывающие, что данные стрелки развернуть нельзя.

Страница 38: фраза «позитивное обобщение йонсоновских теорий» звучит весьма двусмысленно, не понятно, идет ли речь о позитивной логике или о том, что данное обобщение обладает рядом положительных качеств, поэтому оно позитивно.

Страница 57, доказательство леммы 2.2.3: не понятно, что такое $T_{A' \tilde{A}}$.

Страница 62, теорема 2.4.2: нет определения, что такое $\varphi/\psi(M_1)$.

Страница 53, лемма 2.2.2: Написано: «Если M абстрактный, то...», следовало бы добавить «класс».

Некоторые опечатки:

Страница 5: Йонсоновске.

Страница 7: Метоы.

Страница 16: Срвнения.

Страница 22: вкладывается.

Страница 26: засмкнутой

Страница 30: замкнутаямодель

Страница 31: исуществует

Доказательство теоремы 1.3.4, 6-я строчка: следовало бы убрать отрицание.

Страница 38: определёнклас

Страница 40: ограничениярешётки Страница 58: срвнения

Следует заменить, что указанные замечания не умаляют важности полученных результатов, в частности, и диссертации, в целом.

7. Соответствие содержания диссертации в рамках требования правил присуждения степеней.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертационная работа Ольги Ивановны Ульбрихт на тему «Классификация моделей йонсоновских теорий относительно косемантичной эквивалентности» соответствует всем требованиям, предъявляемым к диссертационным работам на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 — «Математика», а её автор заслуживает присуждения ей степени доктора философии (PhD).

Официальный рецензент,
д.ф.-м.н., доцент, профессор
НАО "КазНИТУ им. К. И. Сатпаева"

В. В. Вербовский

Подпись В. В. Вербовского заверяю

Учёный секретарь

Д. К. Наурызбаева