КАСЫМЕТОВА МАЙРА ТЕХНИКОВНА
Теоретико-модельные свойства компаньонов фрагментов йонсоновских множеств

Аннотация диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 — Математика

Актуальность темы. Проблематика, отраженная в теме, относится к классическим вопросам теории моделей. Понятие компаньоны фиксированной теории введено и рассмотрено А.Робинсоном. Компаньоны бывают различных видов и, как показали дальнейшие исследования , между ними существует нетривиальная связь и их описание связано с семантическими свойствами класса моделей моделей рассматриваемой теории. Как правило , изучение компаньонов было связано с индуктивными теориями. К последним относятся основные примеры классических алгебр, такие как, различные типы колец, групп, решеток и полигонов. В дальнейшем с развитием аппарата теории моделей интенсивно стали изучаться структурные вопросы классификации элементарных теорий моделей на языке стабильностных свойств формульных подмножеств рассматриваемой модели. Надо заметить, что такая техника изучения компаньонов предполагает изначально полноту теории. В классе неполных индуктивных теорий центральное место занимают йонсоновские теории, которые удовлетворяют естественным алгебраическим требованиям, как свойство совместного вложения и амальгамы. Йонсоновскими теориями являются теории следующих классических алгебр: поля фиксированной характеристики, абелевы группы, группы, группоиды, булевы алгебры, унары.

На сегодняшний день хорошо изученными являются совершенные йонсоновские теории. Компаньоны совершенных йонсоновских теорий сохраняют многие свойства первоначальной йонсоновской теории: во-первых, они все совпадают между собой, во-вторых, они сохраняют такие важные теоретико-модельные свойства, как йонсоновость теории и при йонсоновской стабильности стабильность ее центра , как одного из компаньонов. Фактически в совершенном случае центр является единственным компаньоном. Несовершенный случай еще абсолютно не изучен, так яркий пример несовершенной йонсоновской теории это йонсоновская теория групп, у которой нет модельного компаньона, но есть форсинг компаньон в счетном случае. При этом в классе несовершенных йонсоновских теорий совершенные йонсоновские подклассы. Примером является класс всех абалевых групп, который совершенный и одновременно он является подклассом класса всех групп. У теории абелевых групп есть модельный компаньон – клас всех алгебраически замкнутых групп.

Следующим этапом исследований является изучение специальных формульных подмножеств семантической модели рассматриваемой йонсоновской теории. В данном случае роль формульных множеств играют йонсоновские множества, определимые замыкания которых совпадают с носителем некоторой экзистенциально замкнутой подмодели семантической модели рассматриваемой йонсновской теории. Рассматривая фрагмент данного множества , а именно , дедуктивное замыкание всех универсально-экзистенциальных предложений, истинных в этом определимом замыкании, мы имеем возможность рассмотреть теоретико-модельные свойтва компаньонов даннного фрагмента.

Изучение свойств компаньонов йонсоновских фрагментов имеет большой смысл, как с позиции задач классической теории моделей, так и новых подходов исследования неполных йонсоновских теорий. Существование компаньонов не всегда обязательно, поэтому умение находить условия их существования является интересной и актуальной проблемой. Изучение структурных вопросов теории и соответственно ее моделей является актуальной задачей теории моделей. При изучении свойств модели необходимо знать свойства ее элементов. Поэтому необходимы некоторые ограничения на свойства, как моделей, так и их подмножеств, так как в общем случае такая задача для неполных теорий представляется совсем неподъемной. Как известно в общем случае аксиомам йонсоновскиих теорий удовлетворяют практически все основные типы алгебраических объектов, но они, к сожалению, не полны в логическом смысле и развитая техника доказательств и используемые методы и понятия из теории моделей, как правило, даны для полных теорий и соответственно не работают в случае йонсоновских теорий. Поэтому развитие аппарата исследований и получение на этой базе новых теоретико-модельных результатов о структуре моделей в нашем случае представляют для развития общей теории моделей важную роль. Как было замечено ранее, в данной работе проводится исследование йонсоновских множеств, которые являются подмножествами семантической модели рассматриваемой йонсоновской теории. Далее у специальных замыканий этих подмножеств будет рассмотрена некоторая индуктивная теория. Фактически на некотором замыкании будет рассмотрена йонсоновская теория.

В конце 80-ых годов казахстанский математик Т.Г.Мустафин обращается к этой тематике и определяет основные цели и методы работы с йонсоновскими теориями. Им были получены результаты, связанные как с произвольными йонсоновскими теориями так и с конкретными примерами йонсоновских теорий.

Как было замечено, понятие компаньона впервые было введено А. Робинсоном. Двумя его важными вкладами в эту область были понятия модельной полноты и модельного пополнения. Эти идеи со временем привели к исследованию модельных компаньонов. Исследованию модельных компаньонов посвящены работы Б.Пуазы, Дж.Барвайса, П.Эклофа и Д.Саббаха .

Далее исследование йонсоновских теорий относительно различных теоретико-модельных свойств их компаньонов, в том числе и J-стабильности было продолжено Ешкеевым А.Р.

Исследование йонсоновских множеств и их фрагментов является следующим шагом Ешкеева А.Р. в изучении йонсоновских теорий.

Определение новых классов позитивных йонсоновских теорий является важным этапом в развитии йонсоновских теорий. Были получены позитивные йонсоновские аналоги работы Ф. Вайспфенинга для позитивной решётки экзистенциальных формул рассматриваемой теории. Понятие позитивных йонсоновских теорий было введено после появления серии работ И. Бен-Якова, т.к. оба понятия позитивности теории из работ Ешкеева А.Р. и И. Бен-Якова совпадают между собой для минимального фрагмента рассматриваемой теории.

Существует класс математических структур, как метрические пространства, который не является йонсоновским классом, но является позитивно йонсоновским в смысле работ И. Бен-Якова и, в частности, в смысле Ешкеева А.Р. для минимального фрагмента. Поэтому понятие позитивности в смысле Ешкеева А.Р. нетривиально. Следует заметить, что существуют различные способы перехода от произвольной теории к йонсоновской теории, сохраняющая первоначальный класс экзистенциально замкнутых моделей. Один из этих способов это морлизация теории. Таким образом, все вышесказанное говорит о том, что изучение теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий является актуальной задачей.

Цель исследования. Изучить свойства компаньонов фрагментов йонсоновских множеств. В частности, исследовать йонсоновские подмножества семантической модели фиксированной йонсоновской теории, на которых рассматриваются подобие йонсоновских множеств, свойства решеток экзистенциальных формул йонсоновских фрагментов, а также свойство косемантичности для позитивных фрагментов и их моделей в обогащенной сигнатуре. Кроме того, изучить сильно минимальные множества на предгеометрии семантической модели фиксированной йонсоновской теории, теоретико-модельные свойства $\#$-компаньонов йонсоновских множеств, ω-стабильность $\#$-компаньона теории йонсоновских пар теории абелевых групп и несчетный центральный тип робинсоновского спектра.

Объект исследования. Йонсоновские теории и их классы моделей. В частности, в работе рассматриваются компаньоны фрагментов йонсоновских множеств.

Методы исследования. В рамках проведенных научных исследований были применены общие методы классической теории моделей, которые связаны с изучением полных теорий, а также методы универсальной алгебры. Использовался семантический метод, суть которого заключается в переносе элементарных свойств центра йонсоновской теории на саму эту теорию. В случае, когда осуществляется транслирование с йонсоновской теории на её центр можно работать даже в несовершенном случае только с классом экзистенциально замкнутых моделей.

Научная новизна темы исследования. Все понятия, связанные с исследованиями йонсоновских множеств и их фрагментов, являются новыми, введенные для исследования различных новых подклассов йонсоновских теорий.

Задачи исследования. Йонсоновские теории относятся к неполным теориям, а развитая техника доказательств и используемые методы и понятия из теории моделей, как правило, даны для полных теорий, поэтому первым этапом исследования является переопределение основных результатов классической теории моделей. Данная работа связана с понятием фрагмента йонсоновского множества. В силу неполноты йонсоновских теорий, мы стремимся работать с совершенным случаем, так как, в этом случае при изучении свойств первого порядка самой теории мы применяем семантический метод. Данный метод неплохо работает при всех типах исследований. Но так как для таких исследований разработаны методы только для полных теорий, то в данной работе рассмотрены аналоги результатов для йонсоновских теорий на языке йонсоновских множеств.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа по своему содержанию носит теоретический характер. Исследование фрагментов йонсоновских множеств и, связанных с ними, теоретико-модельных атрибутов, могут быть использованы при дальнейших исследованиях теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий и их классов моделей в классической теории моделей.

Положения, выносимые на защиту. Результаты диссертации, выносимые на защиту:

1) Получено синтаксическое подобие йонсоновских множеств.
2) Получен критерий косемантичности для позитивных фрагментов и их моделей в обогащенной сигнатуре
3) Категоричность # - компаньона фрагмента йонсоновского подмножества семантической модели фиксированной йонсоновской теории
4) Описана алгебра Стоуна экзистенциальных формул #-компаньона фрагмента йонсоновского подмножества семантической модели фиксированной йонсоновской теории
5) Получен критерий ω-стабильности #- компаньона теории йонсоновских пар теории абелевых групп
6) Получен критерий несчётной категоричности для класса робинсоновского спектра на языке центральных типов.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, из них 1 статья опубликована в журнале, входящем в базу данных Scopus, 3 статьи опубликованы в журналах, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования Республики Казахстан, 5 работ – в материалах международных научных конференций, 1 статья опубликована в периодическом издании дальнего зарубежья (Чехия) ,

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов (первый раздел включает 3 подраздела, второй раздел включает 3 подраздела и третий раздел включает 4 подраздела), заключения, списка использованной литературы, состоящий из 83 наименований.

Краткое содержание диссертационной работы.

Работа состоит из 3 разделов. В разделе 1 даются общие сведения относительно теории компаньонов, йонсоновской теории и ее компаньонов, а также теории экзистенциально-замкнутых структур.

В подразделе 1.1 даются основные понятия и результаты классической теории моделей, касающиеся компаньонов.

Подраздел 1.2 является обзорным, в нем кратко изложены основные сведения о йонсоновских теориях и компаньонах йонсоновской теории и их связи между собой.

Пусть T - йонсоновская теория. Компаньоном йонсоновской теории T, называется такая теория $T^{\#}$ той же сигнатуры, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\left(T^{\#}\right)_{\forall} = T_{\forall}$;

2) для любой йонсоновской теории T', если $T_{\forall} = T_{\forall}'$, то $T^{\#} = \left(T'\right)^{\#}$.

3) $T_{\forall\exists} \subseteq T^{\#}$.

Естественными интерпретациями компаньона $T^{\#}$ являются T^{*}, T^{f}, T^{M}, T^{e}, где T^{*}- центр йонсоновской теории T, T^{f} - форсинг компаньон йонсоновской теории T, T^{M}- модельный компаньон теории T, $T^{e} = Th(E_T)$, где E_T – класс экзистенциально замкнутых моделей теории T.

Теорема 1.2.16 Пусть T йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) T имеет модельный компаньон.

Теорема 1.2.17 Пусть T йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;

2) T^{*} - йонсоновская теория;

3) T^{f} - йонсоновская теория;

4) T^{e} - йонсоновская теория, где $T^{e} = Th(E_T)$;

5) T^{e} - полная теория;

6) T^{0} - полная теория.

Лемма 1.2.6 Если $T^{\#}$ компаньон йонсоновской теории T и T^{M} модельный компаньон T, то $T^{\#} = T^{M}$.

Лемма 1.2.7 Пусть T_1 и T_2 йонсоновские теории. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T_1 и T_2 взаимно модельно совместны;

2) $T_1^{\#} = T_2^{\#}$.

Лемма 1.2.9 Пусть T йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;
2) T - супер – йонсоновская;
3) T^f - йонсоновская;
4) T - *- йонсоновская;
5) T - ^{e}- йонсоновская.

Подраздел 1.3 посвящен описанию экзистенциально замкнутых моделей в рамках изучения фиксированной йонсоновской теории.

В данном параграфе рассмотрены некоторые свойства экзистенциально-замкнутых моделей в классе йонсоновских теорий, т.е любая рассматриваемая теория является йонсоновской теорией.

Теорема 1.3.12 Для любой счетной элементарной подмодели A семантической модели совершенной йонсоновской теории T следующие условия эквивалентны:

1) A- симметрична.
2) A- экзистенциально замкнута.

Существование модельного компаньона теории T тесно связано с T - экзистенциально замкнутыми моделями.

Теорема 1.3.18 Пусть T- совершенная йонсоновская теория.$T^{\#}$- модельный компаньон T. Для любой модели A теории T следующие условия эквивалентны:

1) A является моделью $T^{\#}$, где $T^{\#}$- #-компаньон йонсоновской теории
2) A-T-экзистенциально замкнута.
3) A -T-равномерно экзистенциально замкнута.

Теорема 1.3.20 Пусть T - йонсоновская теория. Следующие условия эквивалентны:

1) T имеет модельный компаньон.
2) T имеет насыщенную модель, которая T-экзистенциально замкнута.
3) T имеет * - насыщенную, T-экзистенциально замкнутую модель.
4) T имеет модель, которая T - равномерно экзистенциально замкнута.

Раздел 2 посвящен описанию теоретико-модельных свойств фрагментов определимых замыканий . В подразделе 2.1 дается описание йонсоновских подмножеств семантической модели фиксированной йонсоновской теории.

Определение 2.1.12 Множество X называется йонсоновским в теории T, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

а) X есть Σ-определимое подмножество C, где C есть семантическая модель теории T;

б) $dcl(X)$есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C, где $dcl(X)$ есть определимое замыкание множества X .

С помощью определений йонсоновских множеств можно перенести свойства для йонсоновских теорий на произвольные подмножества семантической модели.

Два йонсоновских множества (эквивалентны, косемантичны, категоричны), если соответственно будут (йонсоновски эквивалентны, косемантичны, категоричны, синтаксически подобны, семантически подобны и т.д.) модели которые получаются при соответствующим замыкании этих множеств.

Два (алгебраических) йонсоновских множества синтаксически подобны между собой, если синтаксически подобны будут элементарные теории их соотвествующих замыканий.

Пусть T произвольная йонсоновская теоия , тогда $E(T)=\bigcup_{n<\omega} E_n(T)$, где $E_n(T)$ решетка экзистенциальных формул с ровно n свободными переменными..

Определение 2.1.14 Пусть T_1 и T_2 йонсоновские теории. Будем говорить, что T_1 и T_2-- J-синтаксически подобны, если существует биекция $f: E(T_1)\to E(T_2)$ такая что

1) ограничение f до $E_n(T_1)$ есть изоморфизм $E_n(T_1)$ и $E_n(T_2)$, $n<\omega$;

2) $f(\exists v_{n+1}\varphi)=\exists v_{n+1} f(\varphi)$, $\varphi\in E_n(T)$, $n<\omega$,

3) $f(v_1=v_2)=(v_1=v_2)$.

Определение 2.1.19 Алгебраически йонсоновские множества X и Y синтаксически подобны друг другу, если синтаксически подобны соответственно их T_{M_1} и T_{M_2}, где acl(X)= M_1, acl(Y)= M_2 .

Если X и Y синтаксически подобны друг другу, тогда имеем следующий результат:

Теорема 2.1.1 Если T_{M_1} и T_{M_2} -$\exists$-полные совершенные йонсоновские теории, то нижеследующие условия эквивалентны:

1) $T^*_{M_1}$ и $T^*_{M_2}$ - синтаксически подобны как полные теории, как в [40];

2) T_{M_1} и T_{M_2} - J -синтаксически подобны.

Также в данном подразделе рассмотрены фрагменты йонсоновских множеств, которые являются подмножествами семантической модели некоторой йонсоновской теории счетного языка первого порядка. Получены результаты, которые устанавливают связь между свойствами фрагмента и йонсоновской теории, центрального пополнения данной йонсоновской теории и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно рассматриваемого фрагмента. В терминах решетки формул найдены условия элиминации кванторов центрального пополнения йонсоновской теории, позитивной модельной полноты центрального пополнения йонсоновской теории, совершенности йонсоновской теории, йонсоновости центрального пополнения фрагмента. Пусть T - йонсоновская теория полная для экзистенциальных предложений, C - ее семантическая модель.

Подраздел 2.2 посвящен описанию различных компаньонов фрагментов в новом классе теорий, а именно в экзистенциально простых выпуклых йонсоновских теорий. Для данных фрагментов рассмотрены способы классификации фрагментов йонсоновских множеств относительно косемантичности замыканий этих множеств в вышесказанных теориях. Вместе с этим через понятие косемантичности были рассмотрены синтаксические и семантические свойства их моделей.

Пусть T первоначальная йонсоновская теория в языке L. Пусть X_1, X_2-йонсоновские множества в теории. Тогда пусть $M_{X_1} = dcl(X_1)$ есть замыкание йонсоновского множества X_1, $M_{X_2} = dcl(X_2)$ есть замыкание йонсоновского множества X_2. Тогда $T_{M_{X_2}}$ - есть фрагмент X_1, $T_{M_{X_2}}$ - есть фрагмент X_2.

Определение 2.2.3 Модели A и B модели сигнатуры σ называются косемантичными (символически $A \bowtie_J B$), если для любой йонсоновской теории T_1 такой, что $A \models T_1$, найдется йонсоновская теория T_2, косемантичная с T_1, такая что $B \models T_1$. И наоборот

Получены следующие результаты.

Теорема 2.2.1 Пусть $T_{M_{X_1}}$ и $T_{M_{X_2}}$ фрагменты соответственно йонсоновских множеств X_1 и X_2 в экзистенциально простой выпуклой йонсоновской теории, где C_1- семантическая модель фрагмента $T_{M_{X_1}}$, C_2- семантическая модель $T_{M_{X_2}}$. То нижеследующие условия эквивалентны:

1) $C_1 \rhd\lhd_J C_2$,

2) $C_1 \equiv_J C_2$,

3) $C_1 = C_2$.

Теорема 2.2.2 Если M_{X_1}, M_{X_2} – экзистенциально замкнутые подмодели семантической модели совершенной йонсоновской теории, X_1, X_2- йонсоновские множества, то следующие условия эквивалентны:

1) $M_{X_1} \rhd\lhd_j M_{X_2}$,

2) $\forall\exists(M_{X_1}) \rhd\lhd_j \forall\exists(M_{X_2})$.

А также в данном подразделе было рассмотрено свойство косемантичности для позитивных фрагментов и их моделей в обогащенной сигнатуре.

Пусть T есть произвольный $\Delta - PJ$ – йонсоновский фрагмент сигнатуры σ. Пусть C- семантическая модель йонсоновского фрагмента T. $A \subseteq C$. Пусть

$\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$

$T_\Gamma^{PJ}(A) = Th_{\forall\exists^+}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c_a) \mid a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$ где $\{"P \subseteq"\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P - экзистенциально-замкнутая подмодель в языке сигнатуры σ. Рассмотрим все пополнения йонсоновского фрагмента T^* для йонсоновского фрагмента T в языке сигнатуры σ_Γ, где $\Gamma = \{c\}$.Так как T^* является $\Delta - PJ$- йонсоновским фрагментом, то у него есть центр и мы обозначим его через T^C. При ограничении теории T^C до сигнатуры σ теория T^C становится полным типом. Этот тип и называется центральным типом йонсоновского фрагмента T .

Определение 2.2.4 Пусть A - некоторая бесконечная модель сигнатуры σ. A называется $\Delta - PJ$-моделью, если множество предложений $T_\Gamma^{PJ}(A)$ является $\Delta - PJ$- йонсоновским фрагментом в обогащённом языке.

Йонсоновский фрагмент $T_\Gamma^{PJ}(A)$ будем обозначать через $\forall\exists^+(A)$.

Теорема 2.2.4 Пусть A и B -$\Delta - PJ$-модели сигнатуры $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) $A \rhd\lhd_{PJ}^{\Delta} B$,

2) $\forall\exists^+(A) \rhd\lhd_{PJ}^{\Delta} \forall\exists^+(B)$.

Теорема 2.2.5 Пусть T_1^* иT_2^* - $\Delta - PM$ - йонсоновские фрагменты, C_1 - семантическая модель T_1, C_2 – семантическая модель T_2. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) $C_1 \rhd\lhd_{PM}^{\Delta} C_2$,

2) $C_1 \equiv_{PM}^{\Delta} C_2$,

3) $C_1 = C_2$

Подраздел 2.3 посвящен описанию сильно минимальных множеств на предгеометрии семантической модели фиксированной йонсоновской теории

В данном подразделе переопределены основные понятия для формульных подмножеств некоторой эксистенциально-замкнутой модели. При этом с помощью новых понятий на всех подмножествах семантической модели йонсоновской теории задается предгеометрия. Определяются минимальные структуры и соответственно предгеомеотрии и геометрии минимальных структур. Рассматриваются понятия размерности, независимости и базиса в йонсоновски сильно минимальных структурах для йонсоновских теорий.

Определение 2.3.10 Пусть X подмножество семантической модели некоторой фиксированной йонсоновской теории и пусть $:P(X) \to P(X)-$ оператор на множестве подмножествX. Мы говорим, что (X, cl) является предгеометрией если выполняются следующие условия.

1. Если $A \subseteq X$, тогда $A \subseteq cl(A)$ и$cl(cl(A)) = cl(A)$.

2. Если $A \subseteq B \subseteq X$, тогда$cl(A) \subseteq cl(B)$.

3. (принцип замены) $A \subseteq X$, $a, b \in X$, и $a \in cl(A \cup \{b\})$, тогда $a \in cl(A), b \in cl(A \cup \{a\})$.

4. (конечный характер) Если$A \subseteq X$ и $a \in cl(A)$, тогда существует

конечное $A_0 \subseteq A$ такое, что а $a \in cl(A_0)$.

Мы говорим $A \subseteq X$ замкнуто, если $cl(A) = A$.

Теорема 2.3.2 Пусть (X, cl) - J - предгеометрия . Следующие условия эквивалентны.

1) (X, cl)-модулярная;

2) Если $A \subseteq X$ замкнуто и непусто, $b \in X$, $x \in cl(A, b)$, тогда существует $a \in A$, такое что $x \in cl(a, b)$;

3) Если $A, B \subseteq X$ замкнуты и непусты, $x \in cl(A, B)$, тогда существуют $a \in A$ и $b \in B$, такие что $x \in cl(a, b)$.

В первом подразделе раздела 3 рассмотрена счетная и несчетная категоричность #-компаньона совершенного фрагмента некоторого йонсоновского подмножества семантической модели фиксированной йонсоновской теории.

В данном подразделе рассматриваются свойства $Fr^{\#}(A)$– #-компаньона фрагмента йонсоновского множества A совершенной фиксированной йонсоновской теории T.

Теорема 3.1.7 Пусть $Fr(A)$ $\forall\exists$-полный совершенный сильно выпуклый йонсоновский фрагмент йонсоновского множества A. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $Fr^{\#}(A)$ ω -категорична;

2) $Fr(A)$ ω -категорична.

Теорема 3.1.10. Пусть $Fr(A)$ есть йонсоновский фрагмент, являющийся экзистенциально-простой совершенной йонсоновской теорией полной для экзистенциальных предложений йонсоновской универсальной теории, для которой выполняется R_1. То нижеследующие условия эквивалентны:

1) теория $Fr^{\#}(A)$ ω_1-категорична,

2) любая счетная модель из $E_{Fr(A)}$ имеет алгебраически простое модельное расширение в $E_{Fr(A)}$.

Подраздел 3.2 посвящен описанию алгебры Стоуна экзистенциальных формул #-компаньона фрагмента йонсоновского подмножества семантической модели фиксированной йонсоновской теории

Пусть T– йонсоновская теория счетного языка L, A-йонсоновское подмножество семантической модели теории T, $Fr(A)$-фрагмент йонсоновского множества A. Пусть $E_n(Fr(A))$ - дистрибутивная решетка классов эквивалентности $\varphi^{Fr(A)} = \{\psi \in E_n(L) | Fr(A) \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$, $\varphi \in E_n(L)$, $E(Fr(A)) = \bigcup_{n<\omega} E_n(Fr(A))$

Теорема 3.2.1 Пусть $Fr(A)$- совершенный фрагмент йонсоновского множества A, $Fr^{\#}(A)$ его #-компаньон. Тогда

1) $Fr^{\#}(A)$ допускает элиминацию кванторов тогда и только тогда, когда каждый $\varphi \in E_n(Fr(A))$ имеет бескванторное дополнение;

2) $Fr^{\#}(A)$ - позитивно модельно полна, если и только если, когда каждый $\varphi \in E_n(Fr(A))$ имеет экзистенциальное дополнение

Теорема 3.2.2 Пусть $Fr(A)$ - совершенный фрагмент йонсоновского множества A, $Fr^{\#}(A)$ его #-компаньон. Тогда нижеследующие условия эквивалентны:

1) $Fr(A)$ - совершенная теория;

2) $E_n(Fr(A))$ слабо дополняемая решетка;

3) $E_n(Fr(A))$ является алгеброй Стоуна.

Теорема 3.2.3 Пусть $Fr(A)$ - совершенный фрагмент йонсоновского множества A, $Fr^{\#}(A)$ его #-компаньон. Тогда нижеследующие условия эквивалентны:

1) $Fr^{\#}(A)$ - йонсоновская теория;

2)каждый $\varphi \in E_n(Fr(A))$ имеет бескванторное слабое дополнение.

Подраздел 3.3 посвящен изучению теоретико-модельных вопросов абелевых групп в рамках исследования йонсоновских теорий, в частности получен критерий ω-стабильности $\#$-компаньона теории йонсоновских пар теории абелевых групп.

Рассмотрим язык L_P, полученный прибавлением к языку L одноместного предиката $P(x)$. Обозначим через T_P теорию, полученную добавлением к T аксиом, утверждающих, что интерпретация P также есть модель теории T .

Модель теории T_P называется йонсоновской парой (J -парой) моделей T . Будем обозначать эту пару (N,M), где M -- интерпретация предиката $P(\bar{x})$. В этой паре назовём N -- большой моделью, а M -- малой моделью.

Обозначим через $T_{P_{AГ}}$ теорию йонсоновских пар теории абелевых групп.

Предложение 3.3.1 Теория $T_{P_{AГ}}$ – совершенная йонсоновская теория.

*Теорема 3.3.1*Пусть $T_{P_{AГ}}$ -- теория йонсоновских пар теории абелевых групп, тогда следующие условия эквивалентны:

1) $T_{P_{AГ}}$ - J -ω -стабильна;

2) $T^{*}_{P_{AГ}}$ - ω -стабильна;

3) $T_{P_{AГ}}$ обладает свойством JSB.

В подразделе 3.4 изучены теоретико-модельные свойства робинсоновского спектра произвольной модели произвольной сигнатуры. Получен критерий несчётной категоричности для рассмотренного класса спектров на языке центральных типов.

.*Определение 3.4.4* Теория T называется робинсоновской, если она удовлетворяет следующим условиям :

1) T имеет по крайней мере одну бесконечную модель;
2) T универсально аксиоматизируема;
3) T допускает свойство совместного вложения;
4) T допускает свойство амальгамы.

Пусть T - робинсоновская теория, A - произвольная модель сигнатуры σ. Робинсоновским спектром модели A назовем множество:

$$RSp(\mathrm{A}) = \{T \mid T - \text{робинсоновская теория в языке } \sigma \text{ и } \mathrm{A} \in \mathrm{Mod}(T)\}.$$

Отношение косемантичности на множестве теорий является отношением эквивалентности. Тогда $RSp(\mathrm{A})/_{\bowtie}$ – фактор множество йонсоновского спектра модели А по отношению $\bowtie$.

Используя схему получения центрального типа для класса, получим центральный тип класса. Рассмотрим класс $[T] \in JSp(\mathrm{A})/_{\bowtie}$. Пусть $Th(C_{[T]}) = [T]^{*}$. Для каждого $\Delta \in [T] \in JSp(\mathrm{A})/_{\bowtie}$ обозначим теорию, полученную по схеме (#), через $\overline{\Delta}$. Рассмотрим класс $[\overline{T}]$ и тогда класс $[\overline{T}]^{*}$ после ограничения по схеме (#) становится центральным типом класса $[\overline{T}]$и обозначается через $P^{c}_{[\overline{T}]}$.

Теорема 3.4.2 Пусть $[T]$ - наследственный класс из $RSp(\mathrm{A})/_{\bowtie}$, тогда следующие условия эквивалентны

1) Любая счетная модель из $E_{[\overline{T}]}$имеет алгебраически простое модельное расширение в $E_{[\overline{T}]}$
2) $P^{c}_{[\overline{T}]}$ - сильно минимальный тип, где $P^{c}_{[\overline{T}]}$ - центральный тип $[\overline{T}]$

Диссертационная работа выполнена на кафедре алгебры, математической логики и геометрии имени профессора Т.Г.Мустафина Карагандинского государственного университета имени Е.А.Букетова.