БЕЙСЕНОВА ДАНАГҮЛ РЫМБАЕВНА

Разделимость и спектральные свойства дифференциальных и разностных операторов высокого порядка

Аннотация диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 — Математика

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов (каждый раздел состоит из 3 подразделов), заключения и списка использованной литературы.

Количество иллюстраций, таблиц, использованных литературных источников. Список использованных источников состоит из 75 наименований.

Ключевые слова. Сингулярный разностный оператор, неограниченные и колеблющиеся коэффициенты, весовые нормированные пространства, максимальная регулярность, коэрцитивная оценка, компактная резольвента

Актуальность темы.

В теории неограниченных операторов для дифференциальных и разностных операторов основными задачами являются получение условий их обратимости и регулярности, а также получение спектральных и аппроксимативных свойств резольвенты.

Обыкновенные дифференциальные операторы высокого порядка, заданные во всей числовой оси, в связи с задачами квантовой механики начали изучаться в первой половине двадцатого века. В случае, когда оператор является самосопряженным и его промежуточные коэффициенты почти постоянные, или их рост ограничен сверху некоторой степенью потенциала, указанные выше задачи широко изучены. С полученными результатами можно познакомиться в известных монографиях М.А. Наймарка, М.В. Федорюка, Б.М. Левитана и И.С. Саргсяна.

Объекты применения дифференциальных операторов и их разностных аналогов соответствуют различным режимам одного и того же процесса, несмотря на это, развитие теории операторов, соответствующих бесконечным системам разностных уравнений (их впредь мы будем называть бесконечным разностным оператором), значительно отстает от теории сингулярных дифференциальных операторов. Между ними есть существенные различия. Например, задача Коши для дифференциального уравнения сначала решается в малых интервалах, где меняется независимая переменная, а в случае задачи Коши для разностного уравнения, к сожалению, понятие «малого интервала» не существует. Во-вторых, результаты нашего исследования показывают, что условия регулярности разностных операторов значительно слабее, чем их дифференциальных аналогов. Подобные факты встречаются и в практических задачах. Из сказанного, вытекает необходимость отдельного изучения разностных операторов применяя новые методы.

Бесконечные разностные операторы типа Штурма-Лиувилля исследованы в работах М. Отелбаева, Б. Муслимова, R.P. Agarval, C. Chevas, C. Lisama, A. Avila и S. Jitomirskaya (A. Avila – 2014 г. обладатель премии Филдса), а разностные весовые пространства Соболева, связанные с ними, исследованы в работах Е.С. Смаилова, А.Т. Булабаева, Л.М. Мустафиной.

В последнее время в связи с применениями в задачах моделировании стохастических процессов, связанных с динамикой броуновского движения, в задачах моделирования колебаний в среде с сопротивлением и в сжимаемой среде, в задачах биологии и финансовой математики, резко возрастают исследования дифференциальных и разностных операторов второго порядка с независимо растущими промежуточными коэффициентами. Среди них вызывают особый интерес у специалистов случай операторов с промежуточными коэффициентами, который принципиально отличается от операторов типа Штурма-Лиувилля. Дифференциальные операторы второго порядка, у которых промежуточные коэффициенты возрастают порядком, близким к линейным, рассматривались работах A. Lunardi, V. Vespri, G. Metafune, J. Prüss, A. Rhandi, R. Schnaubelt, M. Hieber, L. Lorenzi. А вопрос изучения случая бесконечного разностного оператора второго порядка, если не считать некоторые статьи К.Н. Оспанова, Р.Д. Ахметкалиевой и А. Зулхажав, остается открытым.

Поэтому вопросы корректности, регулярности и спектральные вопросы для разностных и дифференциальных операторов второго и высокого порядков с неограниченными промежуточными коэффициентами исследованы не полностью и соответственно являются актуальными.

Цель исследования. Получить условия обратимости и коэрцитивности разностных и дифференциальных операторов с неограниченными промежуточными коэффициентами второго и высокого порядков и показать некоторые их спектральные свойства.

Объект исследования. Вопросы корректности и разделимости бесконечных разностных и дифференциальных операторов второго и высокого порядков, имеющих неограниченные промежуточные коэффициенты.

Методы исследования. В работе используются методы априорных оценок, построения псевдорезольвенты с помощью локальных задач, теория разделимости операторов, весовые неравенства типа Харди и известные теоремы о возмущениях.

Научная новизна и практическая ценность работы. В работе исследованы новые виды разностных и дифференциальных операторов второго и высокого порядков с промежуточными коэффициентами, рост которых не зависит от потенциала и могут колебаться, и получены условия их коррекности и разделимости, а также достаточное условие дискретности спектра вырожденного оператора. Поскольку в указанном случае методы теории известных операторов Шредингера неприменимы, разработана новая методика, основанная на использовании весовых неравенств Харди и функционалов Фридрихса, а также аппарата усреднения промежуточного коэффициента.

В результате доказаны непрерывная обратимость и разделимость некоторых классов разностных и дифференциальных операторов с приоритетно растущими промежуточными коэффициентами, хотя последние не являются строго положительными. Также показано, что в коэрцитивных оценках для разностных операторов постоянные зависят от шага разности, они обратно пропорциональны к некоторой его степени (указан его порядок).

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы для изучения качественных свойств сингулярных операторов. А также они полезны в моделировании стохастических процессов.

Положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся:

1^0 Разностное неравенство типа Харди, где весовая l_p ($1<p<\infty$) - норма числовой последовательности оценивается через весовую норму в l_p ее разности высокого порядка;

2^0 Достаточные условия обратимости в гильбетровом пространстве бесконечного разностного оператора высокого четного порядка с приоритетно растущими промежуточными коэффициентами;

3^0 Описание области определения названного оператора и не зависящая от колебаний коэффициентов коэрцитивная оценка его элементов;

4^0 Разделимость одного вырожденного бесконечного разностного оператора второго порядка, промежуточный коэффициент у которого не отделен от нуля и бысто колеблется, а также дискретность его спектра;

5^0 Условия разделимости в гильбертовом пространстве дифференциальных операторов четвертого порядка с колеблющимися коэффициентами и второго порядка с комплекснозначными коэффициентами.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах. Из них 3 статьи в изданиях, рекомендуемых ККСОН МОН РК, 1 статья в журнале из списка Scopus с ненулевым IF, 1 статья в зарубежном издании, 4 работы в материалах международных научных конференций, в т.ч. 1 в сборнике трудов зарубежной конференции.

Краткое содержание работы

В подразделе 1.1 первого раздела даны основные определения и частично с доказательствами вспомогательные утвеждения, необходимые для описания основных результатов диссертации.

В подразделе 1.2 рассматривается разностный оператор

$$L_0 y = h^{-2}\Delta^{(2)} y + h^{-1} r\Delta_+ y + h^{-1} s\overline{\Delta_+ y} + qy + p\overline{y} \, ,$$

где $y=\{y_{jh}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\bar{y}=\{\bar{y}_{jh}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $L_0y=\{(L_0y)_{jh}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $f=\{f_{jh}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\Delta_+y=\{\Delta_+y_{jh}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\overline{\Delta_+y}=\{\overline{\Delta_+y_{jh}}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\Delta^{(2)}y=\{\Delta^{(2)}y_{jh}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, а $r=diag\{r_{jh},\ j\in Z\}$, $s=diag\{s_{jh},\ j\in Z\}$, $q=diag\{q_{jh},\ j\in Z\}$, $p=diag\{p_{jh},\ j\in Z\}$ - диагональные матрицы, $h>0$, r_{jh} - заданные действительные числа, s_{jh}, q_{jh}, p_{jh}, f_{jh} - комплексные числа, $\bar{y}_{jh}$ – комплексное сопряженное y_{jh}, а $\Delta_+y_{jh}=y_{(j+1)h}-y_{jh}$, $\overline{\Delta_+y}_{jh}=\overline{y_{(j+1)h}-y_{jh}}$, $\Delta^{(2)}y_{jh}=y_{(j+1)h}-2y_{jh}+y_{(j-1)h}$ $(j\in Z)$. Будем считать, что $f\in l_2(h)$, $l_2(h)$ - пространство элементов $y=\{y_{jh}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ с нормой $\|y\|_{2,h}=\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|y_{jh}|^2h\right)^{1/2}$. Пусть оператор L_0 определен в множестве финитных последовательностей $\tilde{l}=\left\{y=\{y_{jh}\}_{j=-\infty}^{+\infty}:\exists M>0, y_{jh}=0\ \forall j\geq M\right\}$. Через L обозначим замыкание оператора L_0 по норме $l_2(h)$. Введем следующие обозначения:

$$\alpha_{\varphi,\psi}(n)=\left(\sum_{j=0}^{n}|\varphi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\psi_j^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad (n=0,1,2,...),$$

$$\beta_{\varphi,\psi}(k)=\left[\left(\sum_{j=k}^{-1}|\varphi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\psi_j^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\qquad (k=-1,-2,...),$$

$$\gamma_{\varphi,\psi}=\max\left(\sup_{n=0,1,2,...}\alpha_{\varphi,\psi}(n),\ \sup_{k=-1,-2,...}\beta_{\varphi,\psi}(k)\right),$$

где $\phi=diag\{\phi_j,\ j\in Z\}$ и $\psi=diag\{\psi_j,\ j\in Z\}$ ($\psi_j\neq 0,\ \psi_j$ – действительные числа) – заданные диагональные матрицы.

Теорема 0.1 Пусть матрица r удовлетворяет условиям $r_{jh}\geq 1$ $(j\in Z)$,

$$\sup_{n=0,1,2,...}\alpha_{1,\mathrm{r}}(n)<\infty, \tag{1}$$

и

$$\sup_{k=-1,-2,...}\beta_{1,\mathrm{r}}(\mathrm{k})<\infty. \tag{2}$$

А для матриц s, q и p выполняются условия:

$$r_{jh}\geq 8[1+2\gamma_{1,r}]\left(1+\frac{2}{h}+\sqrt{\frac{1}{h}\left(1+\frac{2}{h}\right)}\right)|s_{jh}|+\delta\quad (j\in Z),\ \delta>0,$$

$$\gamma_{q,r}<\infty,\ \gamma_{p,r}<\infty.$$

Тогда оператор L обратим, а обратный оператор L^{-1} определен во всем пространстве $l_2(\mathrm{h})$ и для каждого $y\in D(\mathrm{L})$ выполняется оценка

$$\|h^{-2}\Delta^{(2)}y\|_2+\|h^{-1}r\Delta_+y\|_2+\|h^{-1}s\overline{\Delta_+y}\|_2+\|qy\|_2+\|p\bar{y}\|_2\leq C_1(h)\|L_0y\|_2, \tag{3}$$

где постоянная C_1 в окрестности $h=0$ удовлетворяет условиям $\frac{T_1}{h}\leq C_1\leq\frac{T_2}{h}$ ($\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2$ – постоянные).

Определение 0.1 Говорят, что оператор L разделим в пространстве $l_2(\mathrm{h})$, если для $y \in D(\mathrm{L})$ выполняется неравенство (3). Само неравенство (3) называется коэрцитивной оценкой.

Оператор L_0 не является симметричным. В частном случае, когда $s = p = 0$, $q = \bar{q}$, условия разделимости оператора L_0 были получены К.Н. Оспановым и А. Зулхажав[1]. Этот результат вытекает из Теоремы 0.1 в частном случае. Кроме того, в Теореме 0.1 нет ограничения на колебание коэффициента r, а также поставлены более слабые условия (1), (2).

В подразделе 1.3 работы рассматривается разностный оператор второго порядка

$$(m_0 y)_i = \Delta^{(2)} y_i + (r\Delta_+ y)_i + (qy)_i, \quad i \in Z,$$

с колеблющимся коэффициентом и получены достаточные условия его непрерывной обратимости и разделимости. Будем пользоваться обозначениями из подраздела 1.2. И пусть $y = \left\{y_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\Delta^{(2)} y = \Delta_-(\Delta_+ y)$, $m_0 y = \left\{(m_0 y)_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\Delta_+ y = \left\{\Delta_+ y_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\Delta^{(2)} y = \left\{\Delta^{(2)} y_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, а $r = diag\left\{ r_j,\ j \in Z\right\}$, $q = diag\left\{ q_j,\ j \in Z\right\}$ - действительные диагональные матрицы. Через m обозначим замыкание в l_2 оператора $m_0 y = \Delta^{(2)} y + r\Delta_+ y + qy$, определенного на множестве $\tilde{l}$.

Пусть $r_j \ge 0$ $(j \in Z)$, числа n_j $(j \in Z)$ выбираем следующем виде

$$n_j = \begin{cases} \max\left\{ \mathrm{k} \ge 0 : \dfrac{1}{(1+k)} \ge \sum\limits_{i=j-k}^{j+k} r_i^2 \right\}, & r_j < 1, \\ 0, & r_j \ge 1, \end{cases}$$

а через них определяем последовательность $\{B_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ так:

$$B_j = \begin{cases} 2(n_j + 1), & r_j < 1, \\ r_j^{-1}, & r_j \ge 1. \end{cases} \qquad (4)$$

Введем следующие обозначения:

$$B_+ = diag\left\{ B_i,\ i = 0,1,2,\ldots\right\},\ B_- = diag\left\{ B_j,\ j = -1,-2,\ldots\right\},$$

$$\gamma_{q,B_+} = \sup_{m \ge 0}\left[\left\{\sum_{i=0}^{m} q_i^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{i=m}^{+\infty} B_i^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right] < \infty, \quad \gamma'_{q,B_-} = \sup_{\tau < 0}\left[\left\{\sum_{i=\tau}^{-1} q_i^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\tau} B_i^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right] < \infty,$$

где $q = diag\left\{ q_j,\ j \in Z\right\}$, а B_i $(i \in Z)$ определены равенствами (4).

Теорема 0.2 Пусть действительные диагональные матрицы r, q удовлетворяют условиям

[1] Оспанов Қ.Н., Зұлхажав А. Екінші ретті айырымдық бір теңдеулер жүйесі шешімдерінің қасиеттері жайлы// Қарағанды ун-тің хабаршысы. Математика сериясы. – 2015. –Т.78, №2.

$$r_j \geq 0 \ \ (j \in Z), \tag{5}$$

$$\gamma''_{|q|+E,B_+,B_-} = \max\left(\gamma_{|q|+E,B_+}, \gamma'_{|q|+E,B_-}\right) < \infty,$$

где $|q| + E = diag\left\{ |q_j| + 1,\ j \in Z \right\}$ (E - единичная матрица). Тогда оператор m непрерывно обратим в пространстве l_2 и разделим, т.е. для каждого $y \in D(m)$ выполняется неравенство

$$\left\|\Delta^{(2)} y\right\|_2 + \left\|r\Delta_+ y\right\|_2 + \left\|\left(|q| + E\right) y\right\|_2 \leq C\|my\|_2 .$$

Заметим, что оператор m_0 является частным случаем оператора L_0, рассмотренного в подразделе 1.2. Однако, в приведенной теореме условие $r_j \geq 1$ из Теоремы 0.1 заменено более слабым условием (5), кроме того, условиям Теоремы 0.2 удовлетворяет матрица r с быстро колеблющимися элементами.

Пример 0.1 Условиям Теоремы 0.2 удовлетворяет следующий минимальный замкнутый оператор

$$ly = \Delta^{(2)} y + p\Delta_+ y + y$$

с $p = diag\left\{|j|^{\alpha},\ j \in Z\right\}$, $\alpha > 1$. Поэтому оператор l в l_2 непрерывно обратим и для каждого $y \in D(l)$ выполняется неравенство

$$\left\|\Delta^{(2)} y\right\|_2 + \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |j|^{2\alpha} \left| \Delta_+ y_j \right|^2 \right\}^{1/2} + \|y\|_2 \leq C\|ly\|_2 .$$

В следующей теореме установлены достаточные условия дискретности спектра оператора m . Это утверждение важно, например, для решения бесконечного разностного уравнения

$$my = \Delta^{(2)} y + r\Delta_+ y + qy = f .$$

Теорема 0.3 Пусть для $q = diag\left\{ q_j,\ j \in Z\right\}$ и $r = diag\left\{ r_j,\ j \in Z\right\}$ $r_i \geq 0 \ (i \in Z)$ выполняются условия $\gamma''_{q,B_-,B_+} = \max(\gamma_{q,B_+}, \gamma'_{q,B_-}) < \infty$ и

$$\lim_{m \to +\infty} m^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=m}^{+\infty} B_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \lim_{k \to -\infty} \left(|k|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=-\infty}^{k} B_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0 .$$

Тогда оператор m^{-1} является компактным в пространстве l_2.

Во второй части диссертационной работы рассматривается разностный оператор высокого четного порядка с промежуточным коэффициентом. В подразделе 2.1, в целях совершенствования аппарата исследования доказано одно новое разностное неравенство типа Харди. Пусть s натуральное число, обозначим $\Delta^{(2s)} y = \Delta^{(2)} \Delta^{(2s-2)} y$, $\Delta^{(2s-1)} y = \Delta_+ \underbrace{\Delta^{(2)} \Delta^{(2)} ... \Delta^{(2)}}_{s-1} y$. Через $\hat{H}^{(k)}_{p,v}$ обозначим пространство с нормой

$$\|a\|_{\hat{H}^{(k)}_{p,v}} = \left(\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left| v_s \Delta^{(k)} a_s \right|^p \right)^{1/p} \quad \left(a = \{a_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}\right).$$

Для числовых матриц $u = diag\{u_j,\ j \in Z\}$ и $v = diag\{v_j,\ j \in Z\}$ введем следующие обозначения:

$$T_{\mathrm{m},u,v} = \sup_{n=0,1,2,\dots}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|u_j\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=n}^{+\infty} j^{(\mathrm{m}-1)p'}\left|v_j\right|^{-p'}\right)^{1/p'},$$

$$T''_{\mathrm{m},u,v} = \sup_{\tau<0}\left(\sum_{j=\tau}^{0}\left|u_j\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=-\infty}^{\tau}|j|^{(\mathrm{m}-1)p'}\left|v_j\right|^{-p'}\right)^{1/p'} < \infty,$$

$$T_{0,\mathrm{m},u,v} = \sup_{n=0,1,2,\dots}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|u_j\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\left((j-n)^{(\mathrm{m}-1)}\right)^{p'}\left|v_j\right|^{-p'}\right)^{1/p'},$$

$$T''_{0,\mathrm{m},u,v} = \sup_{\tau=0,-1,-2,\dots}\left(\sum_{j=\tau}^{0}\left|u_j\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=-\infty}^{\tau}\left|\tau-j\right|^{(\mathrm{m}-1)p'}\left|v_j\right|^{-p'}\right)^{1/p'},\ \ p' = p/(\mathrm{p}-1),$$

где m - натуральное число.

Теорема 0.4 Пусть $1 < p < \infty$, $m \ge 2$, а числовые матрицы $u = diag\{u_j,\ j \in Z\}$ и $v = diag\{v_j,\ j \in Z\}$ ($v_j \ne 0 \quad \forall j \in Z$) удовлетворяют условию $\gamma_{m,u,v} = \sqrt[p]{\max\left[\left(T_{m,u,v}\right)^p, \left(T''_{m,u,v}\right)^p\right]} < +\infty$. Тогда для каждого $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left|u_j y_j\right|^p \le C_{2,m,u,v}^p \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left|v_j \Delta^{(\mathrm{m})} y_j\right|^p \ . \tag{6}$$

Кроме того, если $C_{2,m,u,v}$ - минимальная постоянная, удовлетворяющая (6), то

$$\gamma'_{m,u,v} = \sqrt[p]{\min\left[\left(A_+ T_{0,m,u,v}\right)^p, \left(A_- T''_{0,m,u,v}\right)^p\right]} \le C_{2,m,u,v} \le p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}\gamma_{m,u,v},$$

где $p' = p/(\mathrm{p}-1)$, а A_+, A_- - постоянные.

В случае $m=1$ некоторые разностные неравенства типа Харди доказаны в работах Г. Мухамедиева, а также K.F. Andersen и H.P. Heinig[2].

В подразделе 2.3 рассматривается следующий разностный оператор:

$$\tilde{L}_0 y = \Delta^{(2n)}y + r\Delta^{(2n-1)}y + s\overline{\Delta^{(2n-1)}y} + \sum_{j=1}^{2n-1}\left(Q^{(j)}\Delta^{(2n-j-1)}y + P^{(j)}\overline{\Delta^{(2n-j-1)}y}\right),$$

где $y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, $\Delta_+ y_k = y_{k+1} - y_k$, $\Delta_- y_k = y_k - y_{k-1}$, $\Delta^{(2)} y_k = \Delta_-\Delta_+ y_k = y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}$ ($k \in Z$), $\Delta^{(2s)}y = \Delta^{(2)}\Delta^{(2s-2)}y$, $\Delta^{(2s-1)}y = \Delta_+ \underbrace{\Delta^{(2)}\Delta^{(2)}\dots\Delta^{(2)}}_{s-1} y$ $(\mathrm{s} \in \mathrm{N})$, а $r = diag\{r_j,\ j \in Z\}$, $s = diag\{s_j,\ j \in Z\}$, $Q^{(\theta)} = diag\{q_j^{(\theta)},\ j \in Z\}$, $P^{(\theta)} = diag\{p_j^{(\theta)},\ j \in Z\}$ ($\theta = \overline{1, 2n-1}$) – заданные диагональные матрицы. Через $\tilde{L}$ обозначим замыкание по норме l_2 оператора $\tilde{L}_0$, определенного на множестве $\tilde{l}$. Следующая теорема является основным результатом настоящего подраздела.

[2] Andersen K.F., Heinig H.P. Weighted norm inequalities for certain integral operators // SIAM J. Math. -1983. Vol.14, -P. 834-844.

Теорема 0.5 Пусть матрицы $r = diag\left\{ r_j ,\ j \in Z \right\}$, $s = diag\left\{ s_j ,\ j \in Z \right\}$, $Q^{(\theta)} = diag\left\{ q_j^{(\theta)} ,\ j \in Z \right\}$, $P^{(\theta)} = diag\left\{ p_j^{(\theta)} ,\ j \in Z \right\}$ ($\theta = \overline{1, 2n-1}$) удовлетворяют следующим условиям:

$$\max\left(\gamma_{2n-1,\ E,r}, \gamma_{2n-\theta, P^{(2n-\theta)}, r},\ \gamma_{2n-\theta, Q^{(2n-\theta)}, r}\right) < \infty \quad (\theta = \overline{1, 2n-1}),$$

$$\left|s_j\right| \le \alpha_1\ r_j \ \ (j \in Z),\ 0 < \alpha_1 < \frac{1}{5\sqrt{2}},$$

где E - единичная матрица. Тогда разностный оператор $\tilde{L}$ в пространстве l_2 непрерывно обратим и для каждого $y \in D\left(\tilde{L}\right)$ выполняется оценка

$$\left\|\Delta^{(2n)} y\right\|_2 + \left\|r\Delta^{(2n-1)} y\right\|_2 + \left\|s\overline{\Delta^{(2n-1)} y}\right\|_2 + \sum_{j=1}^{2n-1}\left(\left\|Q^{(j)}\Delta^{(2n-j-1)} y\right\|_2 + \left\|P^{(j)}\Delta^{(2n-j-1)} y\right\|_2\right) \le C_1 \left\|\tilde{L} y\right\|_2 .$$

В третьем разделе диссертации мы приводим условия непрерывной обратимости и разделимости некоторых дифференциальных операторов второго и четвертого порядков и сравниваем их с условиями полученными нами в предыдущих разделах для разностных операторов. Здесь мы приняли во внимание то, что моделирование реальных динамических процессов приводят, в основном, к дифференциальным или разностным уравнениям второго и четвертого порядков.

В подразделе 3.1 получены условия коррективности и разделимости вырожденного дифференциального оператора второго порядка $ly = -y'' + r(x)y' + q(x)\bar{y}' + s(x)y + p(x)\bar{y}$ с комплекснозначными коэффициентами в пространстве $L_2(R)$. Здесь функции r и q непрерывно дифференцируемы, а s и p непрерывны, а $y = y_1 + iy_2$ и $\bar{y} = y_1 - iy_2$. Дифференциальное выражение ly определяем на множестве $C_0^{(2)}(\mathrm{R})$ финитных и дважды непрерывно дифференцируемых функций, а его замыкание в пространстве $L_2(R)$ снова обозначим через l.

Для заданных непрерывных функций g и $h \ne 0$ обозначим $\alpha_{g,h}(t) = \|g\|_{L_2(0,t)} \left\|h^{-1}\right\|_{L_2(t,+\infty)}$ $(t > 0)$, $\beta_{g,h}(\tau) = \|g\|_{L_2(\tau,0)} \left\|h^{-1}\right\|_{L_2(-\infty,\tau)}$ $(\tau < 0)$, $\gamma_{g,h} = \max(\sup\limits_{t>0}\alpha_{g,h}(t), \sup\limits_{\tau<0}\beta_{g,h}(\tau))$.

Теорема 0.6 Пусть функции r и q непрерывно дифференцируемы, а s и p непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\sqrt{\left|\mathrm{Re}\, r\right|} - \omega(\left|\mathrm{Im}\, r\right| + \left|q\right|) \ge 1 \text{ и } (1 < \omega < 2),\ \ \gamma_{1+|s|+|p|, \sqrt{|\mathrm{Re}\, r|}} < \infty .$$

Тогда обратный l^{-1} к оператору l существует и определен на всем пространстве $L_2(R)$.

Теорема 0.7 Пусть функции r, q, s и p удовлетворяют всем условиям Теорема 0.6 и

$$\sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{\mathrm{Re}\, r(x)}{\mathrm{Re}\, r(\eta)} < +\infty .$$

Тогда для каждого элемента y из области определения $D(l)$ оператора l имеет место неравенство:

$$\|y''\|_2 + \|ry'\|_2 + \|q\bar{y}'\|_2 + \|sy\|_2 + \|p\bar{y}\|_2 \le C\|ly\|_2 .$$

Теоремы 0.6 и 0.7 обобщают результаты К.Н. Оспанова и Р.Д. Ахметкалиевой[3].

В подразделе 3.2 получены условия коррективности и разделимости в $L_2(R)$ дифференциального оператора четвертого порядка $M_0 y = -y^{(4)} + p(x)y'' + s(x)y' + \theta(x)y$. Здесь p - дважды непрерывно дифференцируемая, а θ - непрерывная функции. Дифференциальный оператор $M_0 y$ определяем в множестве $C_0^{(4)}(\mathrm{R})$ финитных и четырежды непрерывно дифференцируемых функций, а его замыкание в $L_2(R)$ обозначим через M . Результаты этого подраздела имеют место и в некоторых случаях, когда коэффициенты быстро колеблются. Для этого введем следующие усредненные функции :

$$v^*(x) = \sup\left\{ d : d^{-1} \ge \int_{x-d/2}^{x+d/2} v(t)dt \right\} ,$$

$$v_n^*(x) = \inf\left\{ d^{-1} : d^{-2n+1} \ge \int_{x-d}^{x+d} v^2(t)dt \right\} \ (n = 1, 2), \ \ x \in R ,$$

где $v(x)$ - заданная неотрицательная непрерывная функция. Возьмем следующие функции:

$$v_{g,h,\delta_+}(t) = \left(\int_0^t g^2(\xi)d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{t-\delta_+}^{+\infty} \xi h^{-2}(\xi)d\xi \right)^{1/2} \quad (t > 0),$$

$$\mu_{g,h,\delta_-}(\tau) = \left(\int_\tau^0 g^2(\zeta)d\zeta \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\tau+\delta_-} \zeta h^{-2}(\zeta)d\zeta \right)^{1/2} \quad (\tau < 0)$$

и обозначим

$$\omega_{g,h,\delta_+,\delta_-} = \max\left(\sup_{t>0} v_{g,h,\delta_+}(t), \ \sup_{\tau<0} \mu_{g,h,\delta_-}(\tau) \right).$$

Теорема 0.8 Пусть функция $p \ge 1$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим условиям:

1) $\omega_{1,(\sqrt{r})_1^*,0,0}\, p < +\infty$,

2) $\dfrac{1}{a} \le \dfrac{p^*(x)}{p^*(\eta)} \le a \quad \forall \eta \in \left(x - \dfrac{b}{2} p^*(x), \ x + \dfrac{b}{2} p^*(x) \right), \ x \in R,$ где $a \ge 1$, $b > 0$ и $a^3 b^{-1} < \infty$;

3) $A(p, p^*) = \sup\limits_{x \in R} \left[\left(\int_{x - \frac{p^*(x)}{4}}^{x + \frac{p^*(x)}{4}} p^2(t)dt \right)^{1/2} \cdot (\mathrm{p}^*(x))^{\frac{3}{2}} \right] < \infty;$

[3] K. Ospanov, R. Akhmetkalieva. Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation// Elect. J. Qual. Th. Diff. Equ. -2012. –Vol.66. –P.1–12.

4) для непрерывно дифференцируемой функции s и непрерывной функции θ найдутся числа $\delta_{+} > 0$ и $\delta_{-} > 0$ такие, что $\rho_{s,\theta} = \max\left[\omega_{\theta,r_2^*,\delta_+,\delta_-}, \gamma_{s,r_2^*}\right] < +\infty$.

Тогда для оператора M существует обратный оператор M^{-1} , определенный на всем $L_2(R)$. Кроме того, для каждого $y \in D(M)$ имеет место неравенство

$$\|y^{(4)}\|_2 + \|py''\|_2 + \|sy'\|_2 + \|\theta y\|_2 \le C\|f\|_2 .$$

В Теореме 0.8 обратимость и разделимость дифференциального оператора четвертого порядка с возрастающим и быстро колеблющимся промежуточным коэффициентом доказаны, по-видимому, впервые.

В заключении кратко описываются полученные результаты диссертации и указываются некоторые области их применения.

Таким образом, в диссертационной работе исследованы на разрешимость некоторые классы линейных разностных и сингулярных дифференциальных операторов с быстро растущими промежуточными коэффициентами и получены следующие новые научные результаты:

- в целях совершенствования аппарата исследования, доказано разностное неравенство типа Харди, где весовая l_p-норма ($1 < p < \infty$) числовой последовательности сверху оценивается через весовую l_p - норму его разности высокого порядка;
- получены условия обратимости в гильбертовом пространстве бесконечного разностного оператора с возрастающими промежуточными коэффициентами высокого четного порядка, описано полностью его область определения, доказана его разделимость, приведена соответствующая коэрцитивная оценка;
- показаны условия корректности и разделимости вырожденного бесконечного разностного оператора с быстро колеблющимися промежуточными коэффициентами в гильбертовом пространстве, а также найдены условия дискретности его спектра;
- показаны условия непрерывной обратимости и разделимости дифференциального оператора второго порядка с комплекснозначными коэффициентами;
- получены условия корректности и разделимости в гильбертовом пространстве одного дифференциального оператора четвертого порядка с колеблющимися коэффициентами. Эти условия разделимости сравнивались с условиями разделимости разностных аналогов оператора и показано, что условия в разностном случае намного слабее.