

**ПОПОВА НАДЕЖДА ВИКТОРОВНА**

**«СОВЕРШЕННЫЕ ФРАГМЕНТЫ С УСЛОВИЕМ ВЫПУКЛОСТИ И  
ИХ КЛАССЫ МОДЕЛЕЙ»**

**АННОТАЦИЯ**

**диссертации, представленной на соискание степени доктора  
философии (PhD) по образовательной программе  
8D05401-«Математика»**

**Актуальность исследования.** В настоящей диссертационной работе исследованы теоретико-модельные вопросы специальных классов теорий, которые вообще говоря, неполны, но удовлетворяют дополнительным условиям. Эти условия были определены Б. Йонсоном и теории, которые удовлетворяют этим условиям, были названы йонсоновскими. В рамках изучения йонсоновских теорий естественным образом определяется понятие фрагмента – некоторой теории с фиксированными условиями. Данная диссертация посвящена изучению совершенных фрагментов с условием выпуклости и их классов моделей.

Исследование йонсоновских теорий по своей сути представляет класс задач относящихся к одному из разделов математической дисциплины, с названием теория моделей. Теория моделей исследует отношения между синтаксисом (формальные языки) и семантикой (структурами или интерпретациями). Эта дисциплина является разделом математической логики, который занимается изучением связи между формальными языками и их интерпретациями или моделями. Она возникла в начале прошлого века на стыке математической логики, универсальной алгебры, абстрактной алгебры, топологии и алгебраической геометрии. Джером Кислер, известный специалист в этой области, упоминает два исторически сложившихся направления развития теории моделей: запад и восток. Западная теория моделей изучает полные теории, а восточная теория изучает йонсоновские теории. Условные названия «Восток» и «Запад» сложились благодаря основоположникам теории моделей в Америке А. Робинсону, который жил в восточной части и А. Тарскому, жившему на западном побережье США.

При изучении йонсоновских теорий было замечено, что наиболее успешное описание таких теорий, было получено в случае существования модельного компаньона у этих теорий. Йонсоновская теория, имеющая модельный компаньон, который является ее центром, называется совершенной йонсоновской теорией. В этом случае из класса всех йонсоновских теорий выделяется подкласс, который содержит все совершенные йонсоновские теории, причем описание обоих классов для фиксированной сигнатуры является не тривиальной задачей. Яркие примеры иллюстрирующий этот факт - теория групп и теория абелевых групп. Первая теория (теория групп) является примером несовершенной йонсоновской теории, но теория абелевых групп, которая является подклассом класса всех групп, уже является примером

совершенной йонсоновской теории. Помимо этого, если рассматривать классы моделей даже совершенной йонсоновской теории, то можно легко построить примеры, когда йонсоновская теория этих классов будет несовершенной.

Выпуклые теории были определены А. Робинсоном, это подкласс индуктивных теорий, удовлетворяющих условию, что пересечение любых двух ее моделей является снова моделью этой теории, при условии, что это пересечение не пусто. В случае, когда это пересечение никогда не пусто, такая теория называется сильно выпуклой. Совершенные фрагменты с условием выпуклости — это подмножества выпуклых теорий, которые также обладают свойством совершенности в йонсоновском смысле.

Одним из синтаксических инвариантов произвольной йонсоновской теории является ее центр — элементарная теория особой модели данной йонсоновской теории и модель носит название семантической. Эта модель является универсально-однородной в смысле «восточной» теории моделей, при этом хорошо известно, что «западный» аналог универсально-однородной модели является насыщенной моделью. В случае йонсоновской теории это не так. В случае если это так, то ее семантическая модель является насыщенной, что позволило назвать такие йонсоновские теории совершенными.

Изучение совершенных йонсоновских теорий повлекло за собой создание нового технического аппарата для получения соответствующих результатов, вообще говоря, неполных теорий, что связано с теми трудностями, которые появляются при «бедности» таких теорий и отсутствия аналогов известных понятий и связанных с ними результатов из арсенала полных теорий, то есть «западной» теории моделей.

Совмещение требований совершенности, выпуклости для фиксированных фрагментов заданной йонсоновской теории создает новые возможности для изучения, как «восточной», так даже и «западной» теории моделей. В связи с тем фактом, что любую полную не йонсоновскую теорию можно преобразовать в некотором обогащении языка в йонсоновскую теорию с помощью процесса преобразования, который носит название морлезации.

Исследованием свойств, систематизации отдельных результатов и вопросами специальных классов теорий, которые вообще говоря неполны, но удовлетворяют дополнительным условиям, в том числе пересечению понятий совершенности теории и выпуклости моделей занимались А. Тарский, А. Робинсон, Т.Г. Мустафин, А.Р. Ешкеев и др.

Учитывая выше сказанные сложности изучения йонсоновских теорий можно заметить, что данное диссертационное исследование относится к достаточно известной и актуальной тематике как для «западной» так и «восточной» теории моделей. В первую очередь, данная работа связана с вопросами классификации йонсоновских теорий относительно различных важных теоретико-модельных понятий. Выделим основные понятия, которые имеют отношение к этой тематике. Существенным моментом является использование понятия выпуклости, как синтаксическими так и семантическими свойствами различных типов моделей. Основной акцент сделан на изучение счетных моделей, а именно моделей полученных с

помощью некоторого оператора замыкания фиксированной предгеометрии. Синтаксические свойства используются при задании специальных видов счетных моделей за счет формул реализуемых йонсоновскими подмножествами семантической модели и различных комбинаций выпуклости, некоторой полноты, экзистенциальной простоты и совершенности фрагментов этих множеств. Также исследуется классическое понятие счетной категоричности и несчетной категоричности в рамках изучения фиксированных вышеуказанных фрагментов. Счетный случай категоричности изучался в аспекте исследования понятия голографичной модели. Несчетный случай категоричности изучался в связи с понятием сильной минимальности центрального типа центра фиксированной йонсоновской теории.

При изучении йонсоновских теорий, как было уже отмечено выше, в случае совершенности рассматриваемой теории были получены результаты позволившие перенести многие соответствующие теоремы «западной» теории моделей в «йонсоновскую» постановку этих проблем. При этом под фиксированностью данной постановки помимо предположения о частичной полноте теории рассматривались различные комбинации требований связанных с устройством йонсоновских подмножеств семантической модели данных йонсоновских теорий. При этих исследованиях было замечено, что в силу ограниченности полноты и неэлементарности используемых подклассов классов всех моделей этих теорий, средств самой теории недостаточно для получения необходимых результатов. В связи с этим были рассмотрены специальные обогащения языка рассматриваемых теорий, и в этом обогащении первоначальные задачи с помощью понятия наследственности допустимых обогащений и нового понятия центрального типа был получен ряд результатов, позволяющий заметить прогресс в рамках изучения йонсоновских теорий, как совершенных так и не совершенных. Несовершенство йонсоновской теории однозначно связана с неэлементарностью класса экзистенциально замкнутых моделей этой теории. Заметим, что в результате процесса морлезации всегда получается совершенная йонсоновская теория, при этом основным моментом этого процесса является обогащение языка счетным числом одноместных предикатов. Но самая главная проблема, связанная с понятием наследственности допустимого обогащения – это тот факт, что на сегодняшний момент не известно описание этого понятия. И этот открытый вопрос является одним из трудных нерешенных вопросов связанных с понятием центрального типа. С другой стороны, зная свойства контрпримера для ненаследственных йонсоновских теорий, мы можем сделать вывод, что привлечение аппарата предгеометрии для изучения йонсоновских теорий неслучайно. И те дополнительные условия относительно оператора замыкания в утверждениях связанных с центральным типом и сильной минимальностью центра рассматриваемой йонсоновской теории обусловлены теоретико-модельными свойствами контрпримера не наследственных йонсоновских теорий.

Изучение малых моделей, а это имеет отношение сугубо к счетным моделям, связано также с нерешенной проблемой в рамках изучения йонсоновских теорий. Хорошо известно, что простая и атомная модели равны

друг другу, если они счётны в «западном» варианте теории моделей. В «восточном» варианте понятия атомности и простоты счетной модели обобщают и уточняют соответствующие «западные» аналоги. В связи с этим, эти понятия не эквивалентны, так как существуют соответствующие контрпримеры. Поэтому, так как на текущий момент, состояние этих двух открытых вопросов является нерешенной проблемой, естественным было бы считать содержание проблематики данной диссертации достаточно актуальным.

**Цель работы.** Основной целью диссертационного исследования является получение описания новых теоретико-модельных понятий в рамках изучения фрагментов фиксированных подмножеств семантической модели заданной йонсоновской теории.

**Задачи исследования:**

1. Получить теорему существования голографичной модели для совершенной йонсоновской теории с фиксированным центром.

2. В рамках изучения совершенной ядерной теории получить описание ее ядерной модели и связь этой модели с оболочкой Кайзера такой теории.

3. В рамках изучения экзистенциально алгебраически простой теории получить описание алгебраически простых моделей данной теории относительно ядерности модели, при условии существования такой модели.

4. В рамках изучения совершенной, выпуклой, экзистенциально полной и экзистенциально простой йонсоновской теории получить описание ядерных моделей ее центра.

5. Изучить теоретико-модельные свойства фрагмента алгебраически простого множества, при условии совершенности и экзистенциальной простоты с ограниченной полнотой.

6. В рамках изучения фиксированных фрагментов получить описание алгебраически простых множеств, которые задают эти фрагменты.

7. В рамках изучения выпуклых, совершенных, экзистенциально простых фрагментов с ограниченной полнотой получить описание существования ядерной модели центра этого фрагмента.

8. Изучить фиксированные робинсоновски наследственные многообразия относительно алгебраической замкнутости.

9. Описать сильно минимальные центральные типы из класса косемантичности из фиксированного робинсоновски наследственного спектра многообразия.

**Объект исследования** – фрагменты фиксированных подмножеств семантической модели заданной йонсоновской теории. В частности совершенные фрагменты с условием выпуклости.

**Предмет исследования:** Йонсоновские теории, а так же фиксированные фрагменты с условием выпуклости и их классы моделей.

**Методика исследования.** В диссертационной работе применяются классические методы исследования в теории моделей, а также семантический метод. Суть этого метода заключается в переносе свойств первого порядка исчисления предикатов с центра рассматриваемой йонсоновской теории на

саму эту теорию. Также применяется семантический метод к изучению йонсоновских множеств и их выпуклых фрагментов, а также метод переноса свойств первого порядка центра фиксированных фрагментов на сам фрагмент.

**Научная новизна.** В данной диссертации изучались теоретико-модельные свойства семантической модели теории в рамках изучения фиксированных фрагментов рассматриваемой йонсоновской теории. Все понятия, и полученные результаты относительно этих новых понятий в рамках диссертационного исследования являются новыми и ранее не рассматривались.

**Теоретическая и практическая ценность работы.** Полученные результаты имеют теоретический характер и могут быть применены в дальнейших исследованиях в области универсальной алгебры и теорий моделей, а так же при изучении замыканий определенных подмножеств семантической модели для фиксированных йонсоновских теорий.

Так как вопросы, определяющие данную тематику, относятся к классическим проблемам теории моделей, можно заключить, что научное и прикладное значение связано со всеми возможными применениями теории моделей в различных областях теоретической и прикладной математики, а также результаты исследования могут использоваться при чтении спецкурсов на математических факультетах университетов.

**Положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие основные положения работы:

1. Теорема существования голографичной модели для совершенной йонсоновской теории с фиксированным центром.

2. Описание ядерной модели совершенной ядерной теории и связь этой модели с оболочкой Кайзера такой теории.

3. Описание алгебраически простых моделей экзистенциально алгебраически простой теории относительно ядерности модели, при условии существования такой модели.

4. Описание ядерных моделей центра совершенной, выпуклой, экзистенциально полной и экзистенциально простой йонсоновской теории.

5. Теоретико-модельные свойства фрагмента алгебраически простого множества, при условии совершенности и экзистенциальной простоты с ограниченной полнотой.

6. Описание алгебраически простых множеств, которые задают фиксированные фрагменты.

7. Описание критерия существования ядерной модели центра выпуклых, совершенных, экзистенциально простых фрагментов с ограниченной полнотой.

8. Описание сильно минимальных центральных типов из класса косемантической из фиксированного робинсоновски наследственного спектра многообразия.

**Достоверность и обоснованность проведенных исследований** обеспечиваются строгими математическими доказательствами и анализом постановок задач относительно известных примеров понятий, рассмотренных в диссертации.

**Апробация полученных результатов.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих международных конференциях и научных семинарах по профилю диссертации:

- традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования (Алматы, 2020);

- международная конференция «Мальцевские чтения – 2020» (Новосибирск, 2020);

- традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Т.Ш. Кальменова. (Алматы, 2021);

- международная научная конференция посвященная 80-летию профессора Т.Г. Мустафина. «Актуальные задачи математики, механики и информатики» (Караганда, 2022);

- международная научно-практическая конференция, посвященная 105-летию доктора физико-математических наук, академика А.Д. Тайманова и 90-летию Западно-Казахстанского университета им. М. Утемисова «Таймановские чтения -2022» (Уральск, 2022);

- VII Всемирный Конгрессе математиков тюркского мира «TWMS Congress-2023» (Turkestan, 2023);

- Совместное заседание Семинар «Теория моделей» имени Е.А. Палютин ИМ СО РАН (Palyutin Seminar on Model Theory) (Руководители: академик Ю.Л. Ершов, д.ф.-м.н., доцент С.В. Судоплатов) Семинар «Теория моделей» ИМММ МОН РК (Seminar on Model Theory) Руководитель: член-корреспондент НАН РК Б.С. Байжанов;

- научный семинар под руководством профессора А.Р. Ешкеева (КарУ им. акад. Е.А. Букетова).

**Публикации по полученным результатам.** Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах. Из них 1 статья - в журнале, входящем в список Scopus, 3 статьи опубликованы в журналах, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан и 8 работ - в материалах международных научных конференций.

В работах, выполненных с соавторами, вклад каждого из соавторов является равным.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа объемом 80 страниц, состоит из следующих структурных элементов: обозначения и сокращения, введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников.

В целом диссертация состоит из трех разделов, которые взаимосвязаны между собой. В первом разделе представлены основные понятия и результаты из курса теории моделей, которые необходимы для понимания содержания диссертации. Раздел состоит из трех параграфов, каждый из которых содержит информацию из классической теории моделей, определения и утверждения

относительно класса йонсоновских теорий и специального класса экзистенциально замкнутых теорий, соответственно. К понятиям рассматриваемым в первом разделе можно отнести такие понятия как модельная полнота, экзистенциальная замкнутость, выпуклые теории, аксиоматизация выпуклых теорий, виды атомных моделей, свойства амальгамы и совместного вложения, экзистенциально замкнутых моделей, различных видов морфизмов между моделями, различных видов компаньонов, элиминации кванторов, предгеометрии.

Второй раздел связан с изучением понятия голографичности структуры в рамках изучения теоретико-модельных свойств фиксированных йонсоновских теорий относительно понятия голографичности йонсоновской теории и ее моделей. В третьем разделе представлены основные определения, утверждения и их доказательства, полученные в рамках диссертационного исследования.

**Количество использованных источников – 70.**

**Ключевые слова.** Йонсоновская теория, экзистенциально замкнутая модель, алгебраически замкнутая модель, робинсоновский спектр, робинсоновское наследственное многообразие, центральный тип, йонсоновский фрагмент, теоретическое множество, сильно минимальный тип, ядерная модель, голографичная модель,