

Попова Надежда Викторовнаның

ДӨНЕСТІЛІК ШАРТЫМЕН КЕМЕЛ ФРАГМЕНТТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ МОДЕЛЬДЕР КЛАССТАРЫ

8D05401-«Математика» білім беру бағдарламасы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияның

АННОТАЦИЯСЫ

Тақырыптың өзектілігі. Бұл диссертациялық жұмыста, жалпы айтқанда, толық емес, бірақ қосымша шарттарды қанағаттандыратын теориялардың арнайы кластарының модельдік-теориялық мәселелері зерттеледі. Айтылған шарттарды Б. Йонсон анықтады және осы шарттарды қанағаттандыратын теориялар йонсондық деп аталды. Йонсондық теорияларды зерттеу аясында бекітілген шарттары бар қандай да теорияның фрагмент ұғымы анықталады. Ұсынылып отырған диссертациялық жұмыс дөңестік шарты бар кемел фрагменттер мен олардың модельдер класын зерттеуге арналған.

Йонсондық теорияларды зерттеу өз мәні бойынша модельдер теориясы деп аталатын математикалық пәннің бөлімдерінің біріне қатысты есептер класын білдіреді. Модельдер теориясы синтаксис (формальды тілдер) және семантика (құрылымдар немесе интерпретациялар) арасындағы байланысты зерттейді [1]. Бұл пән формальды тілдер мен олардың интерпретациялары немесе модельдері арасындағы байланысты зерттейтін математикалық логиканың бір саласы. Ол өткен ғасырдың басында математикалық логика, эмбебап алгебра, абстрактті алгебра, топология және алгебралық геометрияның қиылысында пайда болды. Осы саладағы белгілі маман Джером Кейслер модельдер теориясының дамуындағы екі тарихи бағытын атап өтеді: батыс және шығыс. Батыс модельдер теориясы толық теорияларды зерттесе, шығыс модельдер теориясы йонсондық теорияларды зерттейді. «Шығыс» және «Батыс» шартты атаулары модельдер теориясының негізін қалаушылардың, яғни Америкадағы шығыс бөлігінде өмір сүрген А.Робинсонның мен АҚШ-тың батыс жағалауында өмір сүрген А.Тарский географиялық тұрғылықты жеріне байланысты қалыптасты [2].

Йонсондық теорияларды зерттеуде осы теориялардың модельді компаньоны бар болуы жағдайы алынған кездегі осындай теориялардың сипаттамасы сәттірек болғаны байқалады. Центр болып табылатын модельді компаньонға ие йонсондық теория кемел йонсондық теория деп аталады. Бұл жағдайда барлық йонсондық теориялар класынан барлық кемел йонсондық теорияларды құрайтын ішкі класы айрықшаланады және де екі класты да сипаттау бекітілген сигнатура үшін тривиалды есеп болып табылмайды. Осы фактыны көрсететін жарқын мысалдар – группалар теориясы және абелді группалар теориясы. Бірінші теория (группалар теориясы) кемел емес йонсондық теорияның мысалы болып табылады, бірақ, барлық группалар класының ішкі класы болып табылатын абелді группалар, әлдеқашан, кемел йонсондық теорияның мысалы болып табылған. Сонымен қатар, егер кемел

Йонсондық теорияның да модельдер класын қарастырсақ, онда осы кластардың йонсондық теориялары кемел емес болған жағдайға мысалдарды оңай құрастыруға болады.

Дөңес теорияларды А.Робинсон анықтаған [1], бұл оның кез келген екі моделінің қиылысуы осы теорияның моделі болып табылатын шартты қанағаттандыратын индуктивті теориялардың ішкі класы, әрине егер бұл қиылысу құр болмаса. Егер қиылысу ешқашан құр болмаған жағдайда, мұндай теория қатты дөңес деп аталады. Дөңестік шарты бар кемел фрагменттер дөңес теориялардың ішкі жиындары болып табылады, олар да йонсондық мағынасында кемелдік қасиетке ие [3].

Қандай да бір йонсондық теорияның синтаксистік инварианттарының бірі оның центрі – берілген йонсондық теорияның арнайы моделінің элементарлы теориясы, ал модель семантикалық инварианты болады. Бұл модель «шығыс» модельдер теориясы мағынасында әмбебап-біртекті болып табылады, ал әмбебап-біртекті модельдің «батыс» аналогы қаныққан модель екені белгілі. Йонсондық теория жағдайында олай емес. Егер солай болса, онда оның семантикалық моделі қаныққан болады, ал мұндай йонсондық теорияларды кемел деп атауға мүмкіндік береді.

Кемел йонсондық теорияларды зерттеуде сәйкес нәтижелерді алу үшін жаңа техникалық аппаратты құруды талап етті, осындайда, жалпы айтқанда, толық емес теорияларда, келесідей қиындықтар туындауы мүмкін, яғни, осындай теорияларды «жұпыны» болуы және «батыс» модельдер теориясынан толық теориялар арсеналынан белгілі ұғымдар мен солармен байланысты нәтижелердің аналогтарының болмауы.

Берілген йонсондық теориялардың бекітілген фрагменттері үшін дөңестік, кемелдік талаптарының бірігуі «шығыс» әрі «батыс» модельдер теориясының зерттелуіне жаңа мүмкіндіктер береді. Осы фактіге байланысты кез келген толық йонсондық емес теорияны морлизация атауына ие түрлендіру үрдісі арқылы тілді байыта отырып йонсондық теорияға түрлендіруге болады.

Жалпы толық емес, бірақ қосымша шарттарды қанағаттандыратын, оның ішінде теорияның кемел болуы мен модельдердің дөңестігі ұғымдарының қиылысуын қоса алғанда, қасиеттерді зерттеу, жеке нәтижелерді жүйелеу, сонымен қатар, теориялардың арнайы класстарының мәселелерін зерттеумен А. Тарский, А. Робинсон, Т.Г. Мустафин, А.Р. Ешкеев және басқалары айналысты.

Йонсондық теорияларды зерттеудегі жоғарыда аталған қиындықтарды ескере отырып, бұл диссертациялық зерттеу «батыс» және «шығыс» модельдер теориясы үшін жеткілікті түрде белгілі және өзекті тақырыпқа қатысты екенін атап өтуге болады. Бірінші кезекте, ұсынылып отырған жұмыс әр түрлі маңызды модельді-теориялық ұғымдарға қатысты йонсондық теориялардың жіктелу сұрағымен байланысты. Осы тақырыпқа қатысты негізгі ұғымдарды атап көрсетейік. Дөңестілік ұғымын әр түрлі модельдер түрі үшін синтаксистік, әрі семантикалық қасиет ретінде қолдану елеулі сәттердің бірі болып табылады. Негізгі назар саналымды модельдерді, атап айтқанда бекітілген алгеометрияның белгілі бір тұйықталу операторын пайдалану арқылы алынған модельдерді зерттеуге аударылады. Синтаксистік қасиеттер саналымды модельдердің арнайы түрлері берілгенде семантикалық модельдің йонсондық ішкі жиындары

және осы жиындардың фрагменттерінің дөңестігі, кейбір толықтығы, экзистенциалды жай және осы жиындардың фрагменттерінің кемелдігінің әртүрлі комбинациялары арқылы жүзеге асырылатын формулалар арқылы көрсету кезінде қолданылады. Сондай-ақ, жоғарыда аталған бекітілген фрагменттерді зерттеу аясында саналымды категорлылық және саналымсыз категорлылық сияқты классикалық ұғымдар зерттеледі. Категорлылықтың саналымды жағдайында зерттеу аспектісі ретінде голографты модельдер ұғымдары зерттелді. Категорлылықтың саналымсыз жағдайында бекітілген йонсондық теорияның центрінің централды типінің қатты минималдылығы ұғымымен байланыстыра отырып зерттелді.

Йонсондық теорияларды зерттеу аясында, жоғарыда айтылғандай, қарастырылып отырған теорияның кемелділік жағдайында «батыс» модельдер теориясының көптеген сәйкес теоремаларын осы есептердің «йонсондыққа» көшіруге мүмкіндік беретін нәтижелер алынды. Сонымен қатар, ұсынылған қойылымның бекітілгендігі теориялардың жартылай толықтығы туралы тұжырымдамалардан басқа осы теорияның семантикалық моделінің ішкі жиындарының құрылымымен байланысты талаптардың әр түрлі комбинациялары қарастырылды. Осы зерттеулерде толықтықты шектеу арқылы және осы теорияның барлық модельдерінің қолданылған ішкі кластардың элементарлы еместігі қажетті нәтижелерді алу үшін теория құралдарының өзі жеткіліксіз екендігі байқалады. Осыған байланысты қарастырылып отырған теориялардың тілінің арнайы байытулары қарастырылып, және осы байытуда бастапқы есептер рұқсаттылығы бар байытулардың мұрагерлік ұғымы мен централды тип жаңа ұғымы көмегімен кемел де кемел емес те йонсондық теорияларды зерттеу аясында прогресті байқайтындай бірқатар нәтижелер алынды. Йонсондық теорияның кемелділік еместігі осы теорияның экзистенциалды тұйық модельдер класының элементарлы болмауымен анық байланысты [4]. Морлизация үрдісінің нәтижесінде әрқашан кемел йонсондық теория алынатынын және бұл үрдістің негізгі мәні тілді унарлы предикаттардың саналымды санымен байыту екенін ескеруімі қажет. Бірақ рұқсаттылығы бар байытудың мұрагерлігі ұғымымен байланысты ең маңызды мәселе - қазіргі уақытта бұл ұғымның белгілі сипаттамасының жоқ болуында. Ал бұл ашық сұрақ централды тип ұғымымен байланысты шешілмеген күрделі сұрақтардың бірі болып табылады. Екінші жағынан, мұралы емес йонсондық теорияларға контр-мысалдың қасиеттерін біле отырып, йонсондық теорияларды зерттеу үшін алгеометрия аппаратын қолдану кездейсоқ емес деген қорытынды жасауға болады. Ал қарастырылып отырған йонсондық теорияның централды типі мен қатты минималдылығына қатысты тұжырымдамалардағы тұйықталу операторына қатысты сол қосымша шарттар мұралы емес йонсондық теориялардың контр-мысалының модельді-теориялық қасиеттерімен анықталады.

Кішігірім модельдерді зерттеу бұл йонсондық теорияларды зерттеу аясында шешілмеген есептерге байланысты нақты саналымды модельдерге қатысты болады. Егер берілген модельдер саналымды болса, жай және атомарлық модельдер бір-біріне тең болатыны «батыс» модельдер теориясы нұсқасынан белгілі. Модельдер теориясының «шығыс» нұсқасында саналымды

модельдердің атомарлығы мен жай болуы сәйкес «батыс» аналогтарын жалпылайды және нақтылайды. Бұл ұғымдар өзара эквивалентті болмайды, осыған байланысты сәйкес контр-мысалдар бар. Сондықтан, қазіргі уақытта бұл екі ашық сұрақтың күйі шешімін таппаған мәселе болғандықтан, бұл диссертацияның мәселелерінің мазмұнын айтарлықтай өзекті деп санау заңды болар еді.

Жұмыстың мақсаты. Диссертациялық зерттеудің негізгі мақсаты қарастырылып отырған йонсондық теорияның семантикалық моделінің бекітілген ішкі жиындарының фрагменттерін зерттеу аясында жаңа модельді-теоретикалық ұғымдардың сипаттамасын алу болып табылады.

Зерттеу міндеттері:

1. Бекітілген центрі бар кемел йонсондық теорияның голографиялық моделінің бар болуы туралы теоремасын алу.

2. Кемел ядролық теорияның ядролық моделі және бұл модельдің осындай теорияның Кайзер қабықшасымен байланысы сипаттамасын алу.

3. Модельдің ядролығына қатысты экзистенциалды алгебралық жай теорияның алгебралық жай моделі сипатталды, егер осындай модель бар болса.

4. Кемел, дөңес, экзистенциалды толық және экзистенциалды жай йонсондық теория центрінің ядролық модельдерін сипаттау.

5. Кемелділікке және толықтығы шектелген экзистенциалды жай шарты орындалатын алгебралық жай жиынның фрагментінің модельді-теоретикалық қасиеттері сипаттамасын алу.

6. Бекітілген фрагменттерді анықтайтын алгебралық жай жиындар сипаттау.

7. Толықтығы шектелген дөңес, кемел, экзистенциалды жай фрагменттердің центрінің ядролық моделінің бар болуы критерийін сипаттау.

8. Көптүрліліктің бекітілген робинсондық мұрагер спектрінен косеманттылық класынан қатты минималды централдық типтерін сипаттау.

Зерттеу нысаны. Қарастырылып отырған йонсондық теорияның семантикалық моделінің бекітілген ішкі жиындарының фрагменттері.

Зерттеу пәні. Зерттеу объектілері йонсондық теория, сонымен бірге дөңестік шарты бар бекітілген фрагменттер және олардың модельдерінің кластары болып табылады.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыста модельдер теориясының классикалық зерттеу әдістерін, сонымен қатар семантикалық әдісті қарастырамыз. Бұл әдістің мәні қарастырылып отырған йонсондық теорияның центрінен предикаттар санағының бірінші ретті қасиеттерін осы теорияның өзіне көшіру болып табылады. Сонымен қатар йонсондық жиындарды және олардың дөңес фрагменттерін зерттеуге, сондай-ақ бекітілген фрагменттердің центрінің бірінші ретті қасиеттерін фрагменттің өзіне көшіру болып табылатын семантикалық әдіс қолданылады.

Ғылыми жаңалық. Бұл диссертацияда қарастырылып отырған йонсондық теорияның тұрақты фрагменттерін зерттеу аясында теорияның семантикалық моделінің модельді-теоретикалық қасиеттері зерттелді. Диссертациялық зерттеу

аясында осы жаңа ұғымдарға қатысты алынған барлық тұжырымдамалар мен нәтижелер жаңа және бұрын қарастырылмаған.

Жұмыстың теориялық және практикалық құндылығы. Алынған нәтижелер теориялық сипатқа ие және әмбебап алгебра және модельдер теориясы саласындағы одан әрі зерттеулерде, сондай-ақ бекітілген йонсондық теориялар үшін семантикалық модельдің анықталатын ішкі жиындарының тұйықталуын зерттеуде қолданылуы мүмкін.

Бұл тақырыпты анықтайтын сұрақтар модельдер теориясының классикалық мәселелеріне қатысты болғандықтан, ғылыми және қолданбалы маңыздылық теориялық және қолданбалы математиканың әртүрлі салаларында модельдер теориясының барлық мүмкін қолданылуымен байланысты деп қорытынды жасауға болады және зерттеу нәтижелері университеттердің математика кафедраларында арнайы курстарды оқыту кезінде қолданылады.

Қорғауға шығарылатын ережелер. Жұмыстың келесі негізгі ережелері қорғауға шығарылады:

1 Бекітілген центрі бар кемел йонсондық теорияның голографиялық моделінің бар болуы туралы теорема алынды;

2 Кемел ядролық теорияның ядролық моделі және бұл модельдің осындай теорияның Кайзер қабықшасымен байланысы сипатталды;

3 Модельдің ядролығына қатысты экзистенциалды алгебралық жай теорияның алгебралық жай моделі сипатталды, егер осындай модель бар болса;

4 Кемел, дөңес, экзистенциалды толық және экзистенциалды жай йонсондық теория центрінің ядролық модельдерін сипатталды;

5 Кемелділікке және толықтығы шектелген экзистенциалды жай шарты орындалатын алгебралық жай жиынның фрагментінің модельді-теоретикалық қасиеттері сипатталды;

6 Бекітілген фрагменттерді анықтайтын алгебралық жай жиындар сипатталды;

7 Толықтығы шектелген дөңес, кемел, экзистенциалды жай фрагменттердің центрінің ядролық моделінің бар болуы критерийі сипатталды;

8 Көптүрліліктің бекітілген робинсондық мұрагер спектрінен косеманттылық класынан қатты минималды централдық типтері сипатталды.

Жүргізілген зерттеулердің дұрыстығы мен негізділігі пайдаланылған әдістердің конструктивтілігімен қамтамасыз етіледі. Жалпы тұжырымдар теоремалар түрінде берілген және олардың дәлелдеулері ұсынылған

Жұмыстың апробациясы. Диссертацияның негізгі нәтижелері келесі халықаралық конференциялар мен ғылыми семинарларда баяндалып, талқыланды:

- Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (сәуір 2020, ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан Республикасы);

- Мальцев оқулары халықаралық конференция (20-24 қараша 2020, Новосибирск мемлекеттік университеті, Новосибирск қ., Ресей);

- Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (сәуір 2021, ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан Республикасы);

- Профессор Т.Ғ. Мұстафиннің 80 жылдығына арналған «Математика, механика және информатиканың өзекті мәселелері» халықаралық ғылыми конференция (8-9 қыркүйек 2022 жыл, академик Е.А. Бөкетов ат. Қарағанды Университеті, Қарағанды қ., Қазақстан Республикасы);

- «Тайманов оқулары – 2022»: халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференция (30 қараша 2022 жыл, М. Өтемісов атындағы Батыс Қазақстан университеті, Орал қ., Қазақстан Республикасы);

- VII Дүниежүзілік түркі әлемі математиктерінің конгресі «TWMS Congress-2023» (Түркістан, 2023);

- Бірлескен отырыс Е.А. Палютин атындағы модельдер теориясы бойынша семинар (Palyutin Seminar on Model Theory) (жетекшілер: академик Ю.Л. Ершов, ф.-м.ғ.д., доцент С.В. Судоплатов) «Модельдер теориясы» семинары ҚР БҒМ ММММ (Seminar on Model Theory) Жетекшісі: ҚР ҰҒА корреспондент мүшесі Б.С. Байжанов;

- профессор А.Р. Ешкеев жетекшілігімен ғылыми семинар (академик Е.А. Бөкетов атындағы ҚарУ).

Жарияланымдар.

Диссертацияның негізгі нәтижелері 12 жұмыста жарияланды: 1 мақала - Scopus базасында индекстелетін журналда, 3 мақала Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған журналдарда және 8 жұмыс халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында жарияланды.

Бірлескен авторлармен орындалған жұмыстарда бірлескен авторлардың әрқайсысының үлесі тең болып табылады.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі.

80 беттен тұратын диссертациялық жұмыс келесі құрылымдық элементтерден тұрады: кіріспе, үш бөлім, қорытынды, пайдаланылған дереккөздер тізімі.

Диссертациялық жұмыс өзара байланысты үш тараудан тұрады. Бірінші тарауда диссертациялық жұмыстың мазмұнын түсіну үшін модельдер теориясы курсынан негізгі ұғымдар мен нәтижелер қарастырылған. Бұл тарау үш параграфтан тұрады, олардың әрқайсысы тиісінше классикалық модельдер теориясына, йонсондық теориялардың класына және экзистенциалды тұйық теориялардың арнайы класына қатысты анықтамалар мен тұжырымдардан тұрады. Бірінші бөлімде қарастырылатын ұғымдарға модельдің толықтығы, экзистенциалды тұйықталу, дөңес теориялар, дөңес теориялардың аксиоматизациясы, атомдық модельдердің түрлері, амальгама және бірлескен енгізілу қасиеттері, экзистенциалды тұйық модельдер, модельдер арасындағы әртүрлі морфизм түрлері, компаньондар әртүрлі типтері, кванторларды жою, алғашқы геометрия сияқты ұғымдар кіреді.

Екінші бөлім йонсондық теорияның голографиялық ұғымымен және оның модельдерімен байланысты бекітілген йонсондық теориялардың модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттеу аясында голографиялық структура түсінігін зерттеумен байланысты.

Үшінші бөлімде диссертациялық зерттеу аясында алынған негізгі анықтамалар, тұжырымдар және олардың дәлелдемелері берілген.

Пайдаланылған дереккөздер саны – 70.

Кілт сөздер. Йонсондық теория, экзистенциалды түйық модель, алгебралық түйық модель, робинсондық спектр, робинсондық мұрагер көптүрлілік, централдық тип, йонсондық фрагмент, теоретикалық жиын, қатты минималды тип, ядролық модель, голографтық модель.