

ОМАРОВА МАХАБАТ ТОЛЕУОВНА

**«ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЦЕНТРАЛЬНЫХ ТИПОВ
ВЫПУКЛЫХ ЙОНСОНОВСКИХ ТЕОРИЙ»**

АННОТАЦИЯ

**диссертации, представленной на соискание степени доктора философии
(PhD) по специальности «6D060100-Математика»**

Актуальность темы исследования. Математическая логика традиционно подразделяется на четыре раздела: теория моделей, теория множеств, теория рекурсии и теория доказательств. Йонсоновские теории изучаются в рамках «восточной» теории моделей, которое по своей сути в свое время определила проблематика задач, сформулированных Абрахамом Робинсоном. Это название достаточно условно, и оно лишь отражает географическое место проживания одного из основателей теории моделей – А. Робинсона, который жил на восточном побережье США, в то время как Альфред Тарский – основатель «западной» теории моделей, жил на западном побережье США. При этом следует заметить, что в качестве морфизмов между моделями теорий в «восточном» направлении изучаются изоморфные вложения и гомоморфизмы, а в «западном» – элементарные мономорфизмы. Основным синтаксическим атрибутом «восточных» теорий является их ограниченность относительно полноты и аксиоматизируемости. При чем длина преникса аксиом таких теорий не превышает числа 2. Семантической особенностью таких теорий является замкнутость моделей этих теорий относительно цепей вложенных моделей. Характерными примерами таких теорий являются индуктивные теории. Подклассом класса индуктивных теорий, который удовлетворяет вышеуказанным свойствам является класс йонсоновских теорий. Этот класс иллюстрируются многочисленными классическими алгебраическими примерами, которые имеют широкое применение во всей математике. Заметим, что в общем случае йонсоновские теории не являются полными. Таким образом, решение задач «восточной» теории моделей существенно затруднено тем фактом, что современный аппарат теории моделей развит в основном для полных теорий, и поэтому актуальность изучения теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий не вызывает сомнений, и развитие аппарата исследования таких теорий и их классов моделей очевидным образом является интересной и сложной проблемой задач современной теории моделей.

Среди йонсоновских теорий особый класс выделяется с помощью двух важных условий, как совершенность и наследственность йонсоновской теории. Заметим, что эти условия определяются совершенно естественным образом, и существует большое количество алгебраических примеров таких наследственных совершенных йонсоновских теорий. Совершенность йонсоновской теории определяется многими эквивалентными критериями, и один из них является достаточно плодотворным инструментом при изучении

йонсоновских теорий. А именно, центр таких йонсоновских теорий является их модельным компаньоном. Очень важным инструментом при изучении свойств элементов моделей йонсоновских теорий является понятие центрального типа. Это понятие получается при обогащении языка рассматриваемой теории. Как оказалось, в новом языке не все теоретико-модельные свойства сохраняются, в частности, например, такое свойство, как амальгама. Ранее, также было замечено, что такое классическое понятие, как стабильность теории, также не сохраняется в случае обогащения. Обогащение языка называется допустимым, если оно сохраняет определимость типа рассматриваемой теории в обогащении. Наследственность же йонсоновской теории T говорит нам о том, что при любом допустимом обогащении сохраняется йонсоновость теории T .

Данная диссертационная работа будет состоять из технической и непосредственно содержательной частей. К технической части относятся все договоренности о нумерации утверждений, обозначенных во введении, а также список обозначений и сокращений, приведенных на 3 странице диссертации. Содержательная часть состоит из введения, трех глав, которые взаимосвязаны между собой, заключения и списка использованных источников.

Глава первая начинается с определения основных понятий и необходимых утверждений по йонсоновским теориям, семантической модели, йонсоновским и теоретическим множествам, фрагментам йонсоновского множества, оболочкам Кайзера модели и класса моделей, взаимосвязи между совершенной йонсоновской теорией и компаньоном йонсоновской теории, центральным типам, J – сильно минимальными формулой и теорией, взаимозависимости между сильно выпуклой теорией и J - $\varphi(x)$ -выпуклой теорией.

Вторая глава является необходимым и достаточным введением в (n_1, n_2) -йонсоновские теории и введены новые понятия: (n_1, n_2) -йонсоновская теория, (n_1, n_2) -позитивная йонсоновская теория, n_1 -йонсоновская цепь, эвентуально элементарная цепь моделей. Доказаны основные утверждения относительно компаньонов этих теорий и цепей экзистенциально-замкнутых моделей (n_1, n_2) -позитивных йонсоновских теорий.

Глава третья посвящена таким понятиям, как существенный тип, существенная база центральных типов, APA –множеству, $\varphi(x)$ -выпуклой йонсоновской теории, J - $\varphi(x)$ -выпуклому наследственному йонсоновскому спектру, где посчитано количество фрагментов совершенного йонсоновского спектра выделенного подкласса для класса экзистенциально замкнутых моделей (теорема 3.3.4), и это число фрагментов связано с оценкой, полученной ранее в теореме 6 в статье [1]. Для того, чтобы воспользоваться этой оценкой, в данной главе развивается соответствующая техника для возможности этого применения.

Цель работы. Основной целью диссертационного исследования является получение описания новых теоретико-модельных понятий и свойств

в рамках изучения выпуклых йонсоновских теорий, и, соответственно, фрагментов фиксированных подмножеств семантической модели заданной выпуклой йонсоновской теории.

Задачи исследования. Содержанием настоящей работы является исследование следующих задач: переопределение вопросов А.Д. Тайманова в рамках йонсоновских теорий; описание теоретико-модельных свойств некоторых сильно выпуклых фрагментов и совершенной, сильно выпуклой йонсоновской теории; (n_1, n_2) -йонсоновские теории и их модельные компаньоны; (n_1, n_2) -позитивные йонсоновские теории и цепи экзистенциально замкнутых моделей данных теорий; описание центральных типов выпуклых йонсоновских теорий и существенной базы центральных типов с сильно минимальными формулами сильно выпуклых йонсоновских теорий при условии, что $cl = acl = dcl$.

Объект исследования. Объектами исследования являются йонсоновские теории и йонсоновские фрагменты, с учетом выпуклости, совершенности, наследственности, и некоторых фиксированных теоретико-модельных свойств в конкретных случаях, а также изучение их классов экзистенциально замкнутых моделей.

Предмет исследования: йонсоновские теории и их классы моделей.

Методика исследования. В рамках проведенных научных исследований были применены общие методы классической теории моделей, связанные с изучением полных теорий, и используются методы универсальной алгебры. Одним из главных методов изучения йонсоновских теорий является метод, предложенный в свое время Т.Г. Мустафиным и Ешкеевым А.Р. Он заключается в том, что элементарные свойства центрального пополнения транслируются на йонсоновский прообраз, при этом центральное пополнение является инвариантом йонсоновской теории. Центральное пополнение йонсоновской теории – это элементарная теория некоторой модели, которая носит название семантической модели, существование которой доказано в работе Морли, Воота [2]. Эта модель является йонсоновским аналогом монстр-модели, которая используется в «западной» теории моделей. В связи с этим возникает проблематика изучения йонсоновских компаньонов. Один из новых методов исследования йонсоновских теорий является метод использования центральных типов, который предложил Ешкеев А.Р. Суть данного метода будет заключаться в обогащении языка рассматриваемой йонсоновской теории константами и предикатами. Получаемый центральный тип – это суть центра йонсоновской теории при допустимом обогащении с учетом наследственности этой теории. Таким образом, мы от теории переходим к типу и к нему применяем технику работы с типами, взятую из технического арсенала работы с типами для полной теории.

Научная новизна. Многие понятия, связанные с исследованиями выпуклых йонсоновских теорий и их центральных типов, являются новыми, в силу новизны самих этих понятий, при этом их теоретико-модельные свойства необязательно удовлетворяют соответствующим свойствам этих

понятий для полных теорий. В связи с этим, можно сделать однозначный вывод о новизне понятий, и соответствующих теоретико-модельных свойствах этих понятий.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа по своему содержанию носит теоретический характер. Исследование центральных типов выпуклых йонсоновских теорий и связанные с ними теоретико-модельные атрибуты могут быть использованы при дальнейших исследованиях теоретико-модельных свойств фрагментов йонсоновских множеств и их классов моделей в классической теории моделей.

Поскольку вопросы, которые определяют данную тематику, относятся к классическим проблемам теории моделей, можно заключить, что научное и прикладное значение связано со всеми возможными применениями теории моделей в различных областях теоретической математики, а результаты исследования могут использоваться при чтении спецкурсов на математических факультетах университетов.

Положения, выносимые на защиту. На защиту представляются следующие основные результаты диссертационного исследования:

1) получен результат относительно переопределения вопросов А.Д. Тайманова в рамках йонсоновских теорий;

2) получен результат, связанный с теоретико-модельными свойствами некоторых сильно выпуклых фрагментов и совершенной, сильно выпуклой йонсоновской теории;

3) рассмотрены (n_1, n_2) -йонсоновские теории и получены результаты относительно их модельных компаньонов;

4) рассмотрены (n_1, n_2) -позитивные йонсоновские теории и получен критерий относительно цепей экзистенциально замкнутых моделей данных теорий;

5) изучены центральные типы выпуклых йонсоновских теорий и существенная база центральных типов с сильно минимальными формулами сильно выпуклых йонсоновских теорий при условии, что $cl = acl = dcl$. Здесь получен результат относительно количества совершенных фрагментов некоторой йонсоновской теории и фиксированного йонсоновского спектра для фиксированного класса моделей произвольной сигнатуры.

Достоверность и обоснованность обеспечивается конструктивностью используемых методов. Общие выводы представлены в виде теорем и представлены их доказательства.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

– Традиционная международная апрельская математическая конференция «Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts», посвященная 80-летию юбилею академика НАН РК С.Н. Харина (Казахстан, г. Алматы, Институт математики и математического моделирования, 3-5 апреля 2019 г., секция «Алгебра, математическая логика и геометрия»);

– Международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики», приуроченной к 70-летию д.ф.-м.н., профессора Рамазанова М.И. (Казахстан, г. Караганда, КарГУ им. акад. Е.А. Букетова, 12-13 июня 2019 г.);

– the 16th Asian Logic Conference (Казахстан, г. Нур-Султан, Назарбаев университет, 17-21 июня 2019 г.);

– Международная конференция, посвященная 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal» (Казахстан, г. Нур-Султан, ЕНУ им. Гумилева, 16-19 октября 2019 г.);

– международная научная конференция «Мальцевские чтения» (Россия, г. Новосибирск, 16-20 ноября 2020 г.);

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Кальменова Т.Ш. (Казахстан, г. Алматы, Институт математики и математического моделирования, 5-8 апреля 2021 г., секция «Алгебра, математическая логика и геометрия»);

– международная научная конференция «Мальцевские чтения» (Россия, г. Новосибирск, 20-24 сентября 2021 г.);

– международная научная конференция «Актуальные задачи математики, механики и информатики», посвященная 80-летию профессора Т.Г. Мустафина (Казахстан, г. Караганда, 8-9 сентября 2022 г.);

– международная научная конференция «Математическая логика и компьютерные науки» (Казахстан, г. Астана, 7-8 октября 2022 г.);

– III международные «Таймановские чтения», посвященные 85-летию университета «Современная математика: проблемы и приложения» (Казахстан, г. Кызылорда, 25 ноября 2022 г.).

Также полученные результаты были доложены и обсуждены на научном семинаре кафедры алгебры, математической логики и геометрии имени профессора Т.Г. Мустафина КарГУ им. акад. Е.А. Букетова (руководитель – д.ф.-м.н., профессор Ешкеев А.Р.).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 18 работах, из них 2 статьи опубликованы в журналах, входящих в базу данных Scopus (в журнале «Lobachevskii Journal of Mathematics», Процентиль – 55, в журнале «Bulletin of the Karaganda university-Mathematics», Процентиль – 35); 5 статей опубликованы в журналах, рекомендованных КОКСНВО МНВО РК; 11 работ – в материалах международных научных конференций.

В работах, выполненных с соавторами, вклад каждого из соавторов является равным.

Структура и объём диссертации. Объём диссертации составляет 68 страниц. Работа состоит из следующих структурных элементов: обозначения и сокращения, введения, основных трёх разделов, заключения и списка использованных источников. Нумерация определений и утверждений имеет три индекса: первый индекс – номер раздела, второй – номер подраздела,

третий – собственный номер определения или утверждения в данном подразделе.

Количество использованных источников – 70.

Ключевые слова. Йонсоновская теория, совершенная наследственная йонсоновская теория, $\varphi(x)$ -выпуклая теория, J - $\varphi(x)$ -выпуклая теория, йонсоновский фрагмент, ядерная модель, центральный тип, сильно минимальные формула и теория, APA – множество, существенная база, совершенный наследственный йонсоновский спектр.