

## ОМАРОВА МАХАБАТ ТОЛЕУОВНАНЫҢ

### «ДӨНЕС ЙОНСОНДЫҚ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ ЦЕНТРАЛДЫҚ ТИПТЕРІНІҢ МОДЕЛЬДІ-ТЕОРЕТИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ»

6D060100 – Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияның

#### АННОТАЦИЯСЫ

**Тақырыптың өзектілігі.** Математикалық логика дәстүрлі түрде төрт салаға бөлінеді: модельдер теориясы, жиындар теориясы, рекурсия теориясы және дәлелдеу теориясы. Йонсондық теориялар мәні бойынша өз кезінде есептердің мәселесін анықтап, тұжырымдаған Абрахам Робинсонның «шығыс» модельдер теориясы аясында зерттеледі. Бұл атау жеткілікті түрде шартты, себебі бұл модельдер теориясының негізін салушылардың бірінің географиялық тұрғылықты жеріне байланысты қойылған, АҚШ-тың шығыс жағалауы А. Робинсонның географиялық тұрғылықты жерін көрсетсе, ал «батыс» жағалауында А.Тарски өмір сүрді. Сонымен қатар модельдер теориясының «шығыс» бағытында морфизм ретінде изоморфты енгізулер мен гомоморфизмдер, ал «батыс» бағытында элементарлық мономорфизмдер зерттеледі. «Шығыс» теорияларының негізгі синтаксистік атрибуты олардың толықтығы мен аксиоматизациясына қатысты шектілігі болып табылады. Сонымен қатар, мұндай теориялардың аксиомаларының прениксінің ұзындығы 2 санынан аспайды. Мұндай теориялардың семантикалық ерекшелігі – осы теориялардың модельдерінің енгізілген модельдердің тізбектеріне қатысты тұйықтылығы. Мұндай теорияларға тән мысалдар индуктивті теориялар болып табылады. Жоғарыда аталған қасиеттерді қанағаттандыратын индуктивті теориялар класының ішкі класы – йонсондық теориялар класы. Бұл класс барлық математикада кеңінен қолданылатын көптеген классикалық алгебралық мысалдармен суреттелген. Жалпы жағдайда йонсондық теориялар толық емес екенін ескереміз. Осылайша, «шығыс» модельдер теориясының есептерін шешу модельдер теориясының қазіргі заманғы аппараты негізінен толық теориялар үшін дамығандығымен айтарлықтай қиындайды, сондықтан йонсондық теориялардың модельді-теориялық қасиеттерін зерттеудің өзектілігі күмән тудырмайды және мұндай теориялар мен олардың модельдер кластарын зерттеу аппаратының дамуы қазіргі заманғы модельдер теориясының есептерінің қызықты және күрделі мәселесі болып табылады.

Йонсон теорияларының ішінде ерекше класс йонсон теориясының кемелділігі мен мұралылығы сияқты екі маңызды шарттың көмегімен айрықшаланады. Бұл шарттар толығымен табиғи түрде анықталатынын және осындай мұралы кемел йонсондық теориялардың көптеген алгебралық мысалдары бар екенін ескеруіміз қажет. Йонсон теориясының кемелділігі көптеген эквивалентті критерийлермен анықталады және олардың бірі

Йонсон теорияларын зерттеу кезінде өте пайдалы құрал болып табылады. Дәлірек айтсақ, мұндай теориялардың центрі олардың моделді компаньоны болып табылады. Йонсондық теориялардың модельдерінің элементтерінің қасиеттерін зерттеудегі маңызды құралы – централды тип ұғымы. Бұл ұғым қарастырылып отырған теорияның тілін байыту арқылы алынады. Жаңа тілде барлық дерлік моделдік-теориялық қасиеттер сақталмайтыны белгілі болды, дербес жағдайда, мысалы ретінде амальгама қасиетін алуға болады. Сонымен қатар, осыдан бұрын стабилділік сияқты классикалық ұғым да байытуда сақталмайтындығы байқалды. Тілді байыту рұқсат етілген деп аталады, егер байытуда қарастырылған теорияда типтің анықталғандығын сақтаса.  $T$  йонсондық теориясының мұралылығы кез келген рұқсат етілген байытуда  $T$  теориясының йонсондылығын сақтайтынын көрсетеді.

Ұсынылып отырған диссертация техникалық және тікелей мазмұнды бөліктерден тұрады. Техникалық бөлімде кіріспеде көрсетілген мәлімдемелердің нөмірленуі бойынша барлық келісімдер, сонымен қатар диссертацияның 3-бетінде берілген шартты белгілер мен қысқартулар тізімі енгізілген. Мазмұны кіріспеден, өзара байланысты үш тараудан, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Бірінші тарауда йонсондық теориялар, семантикалық модель, йонсондық және теоретикалық жиындар, йонсондық жиындардың фрагменттері, модельдің Кайзер қабықшасы және модельдер класы, йонсондық теорияның компаньоны мен кемел йонсондық теория арасындағы байланыс, централдық типтер,  $J$ -қатты минималды формула мен теория,  $J$  –қатты дөңес теория мен  $J$ - $\varphi(x)$ -дөңес теория арасындағы өзара тәуелділік сияқты негізгі ұғымдар мен қажетті мәлімдемелер қарастырылған.

Екінші тарау  $(n_1, n_2)$ -йонсондық теорияларына қажетті және жеткілікті кіріспе болып табылады және бұл тарауда жаңа тұжырымдамалар енгізілді:  $(n_1, n_2)$ -йонсондық теория,  $(n_1, n_2)$ -позитивті йонсондық теория,  $n_1$ -йонсондық тізбек, эвентуалды элементарлық модельдердің тізбесі. Осы теориялардың компаньондарына және  $(n_1, n_2)$ -позитивті йонсондық теориялардың экзистенциалды тұйық модельдерінің тізбелеріне қатысты негізгі тұжырымдар дәлелденді.

Үшінші тарау елеулі тип, централдық типтердің елеулі базасы,  $APA$  –жиындар,  $\varphi(x)$ -дөңес йонсондық теория,  $J$ - $\varphi(x)$ -дөңес мұралы йонсондық спектр сияқты ұғымдарға арналған, мұнда класс үшін таңдалған ішкі кластың кемел йонсондық спектрінің фрагменттерінің экзистенциалды тұйық модельдер саны есептелінеді (3.3.4 теорема) және бұл фрагменттер саны [1] мақаладағы 6-теоремада алынған бағамен байланысты. Осы бағалауды пайдалану үшін берілген тарауда осы қолданудың бұл мүмкіндігі үшін тиісті техника дамиды.

**Жұмыстың мақсаты.** Диссертациялық зерттеудің негізгі мақсаты – берілген дөңес йонсондық теорияның семантикалық моделінің бекітілген ішкі жиындарының фрагменттерін дөңес йонсондық теорияларды зерттеу аясында жаңа моделді-теориялық ұғымдар мен қасиеттердің сипаттамасын алу.

**Зерттеу міндеттері.** Осы жұмыстың мазмұны мынадай есептерді зерттеу болып табылады: йонсондық теориялар аясында А.Д. Таймановтың сұрақтарын қайта анықтау; кейбір қатты дөңес фрагменттердің моделді-теориялық қасиеттерімен және кемел қатты дөңес йонсондық теориямен байланысты сипаттамасы;  $(n_1, n_2)$ -йонсондық теориялар және олардың модельді компаньондар;  $(n_1, n_2)$ -позитивті йонсондық теориялар және осы теориялардың экзистенциалды тұйық модельдерінің тізбелер; дөңес йонсондық теориялардың централдық типтері және  $cl = acl = dcl$  шартымен қатты дөңес йонсондық теориялардың қатты минималды формулалары бар централдық типтердің елеулі базасы сипаттамасы.

**Зерттеу объектісі.** Зерттеу объектілері йонсондық теориялар және дөңестігін ескере отырып йонсондық фрагменттер мен олардың модельдер кластары болып табылады.

**Зерттеу пәні.** Зерттеу пәні – йонсондық теориялар және оларға тиісті модельдердің кластары.

**Зерттеу әдістері.** Жүргізілген ғылыми зерттеулер аясында толық теорияларды зерттеуге байланысты классикалық модельдер теориясының жалпы әдістері мен әмбебап алгебра әдістері қолданылды. Йонсондық теорияларды зерттеудің негізгі әдістерінің бірі – Т.Г. Мұстафин және Ешкеев А.Р. ұсынған әдіс болып табылады. Бұл централдық толықтырудың элементарлық қасиеттері йонсондық алғашқы бейнеге аударылады, сонымен бірге централдық толықтыру йонсондық теорияның инварианты болып табылады. Йонсондық теориясының централдық толықтыруы ол кейбір модельдің элементарлық теориясы табылады, оның бар екендігі Морли мен Вооттың жұмысында дәлелденді [2]. Бұл модель «батыс» модельдер теориясында қолданылатын монстр моделінің йонсондық аналогы болып табылады. Осыған байланысты йонсондық компаньонның зерттеу мәселесі туындайды. Йонсондық теорияларды зерттеудің жаңа әдістерінің бірі Ешкеев А.Р. ұсынған централдық типтерді зерттеу әдісі болып табылады. Бұл әдістің мәні қарастырылып отырған йонсондық теорияның тілін константалар мен предикаттармен байыту. Алынған централдық тип осы теорияның мұрагерлігін ескере отырып, рұқсат етілген байыту арқылы йонсондық теорияның центрінің мәні болып табылады. Осылайша, біз теориядан типке көшеміз және оған толық теория үшін типтермен жұмыс істеудің техникалық арсеналынан алынған типтермен жұмыс істеу әдістемесін қолданамыз.

**Ғылыми жаңалық.** Дөңес йонсондық теорияларды және олардың централдық типтерін зерттеумен байланысты көптеген ұғымдар жаңа болып табылады, олар йонсондық теориялардың әртүрлі жаңа ішкі кластарын оқу және зерттеу үшін енгізілген.

**Жұмыстың теориялық және практикалық құндылығы.** Жұмыстың мазмұны теориялық сипатқа ие. Дөңес йонсондық теориялардың централдық типтерін және онымен байланысты модельді-теоретикалық атрибуттарды зерттеу йонсондық жиындардың фрагменттерінің модельді-теоретикалық

қасиеттерін және классикалық модельдер теориясындағы олардың модельді кластарын одан әрі зерттеуде қолданылуы мүмкін.

Бұл тақырыпты анықтайтын сұрақтар модельдер теориясының классикалық мәселелеріне қатысты болғандықтан, ғылыми және қолданбалы маңыздылығы теориялық математиканың әртүрлі салаларында модельдер теориясының барлық мүмкін қолдануларымен байланысты деп қорытынды жасауға болады және зерттеу нәтижелерін университеттің математика кафедраларында арнайы курстарды оқыту кезінде пайдалануға болады.

**Қорғауға шығарылатын ережелер.** Диссертациялық зерттеудің келесі негізгі нәтижелері қорғауға ұсынылады:

1) йонсондық теориялар аясында А.Д. Таймановтың сұрақтарын қайта анықтауға қатысты нәтиже алынды;

2) кейбір қатты дөңес фрагменттердің моделді-теориялық қасиеттерімен және кемел қатты дөңес йонсондық теориямен байланысты нәтиже алынды;

3)  $(n_1, n_2)$ - йонсондық теориялар қарастырылып, олардың модельді компаньондарына қатысты нәтижелер алынды;

4) қарастырылып отырған  $(n_1, n_2)$ -позитивті йонсондық теориялар және осы теориялардың экзистенциалды тұйық модельдерінің тізбелеріне қатысты критерий алынды;

5) дөңес йонсондық теориялардың централдық типтері және  $cl = acl = dcl$  шартымен қатты дөңес йонсондық теориялардың қатты минималды формулалары бар централдық типтердің елеулі базасы зерттелді. Мұнда кез келген сигнатураның модельдерінің бекітілген класы үшін кейбір йонсондық теорияның және бекітілген йонсондық спектрдің кемел фрагменттерінің санына қатысты нәтиже алынды.

**Жүргізілген зерттеулердің дұрыстығы мен негізділігі** пайдаланылған әдістердің конструктивтілігімен қамтамасыз етіледі. Жалпы тұжырымдар теоремалар түрінде берілген және олардың дәлелдеулері ұсынылған.

**Жұмыстың апробациясы.** Диссертацияның негізгі нәтижелері келесі конференцияларда баяндалып, талқыланды:

– ҚР ҰҒА академигі С.Н. Харинның 80 жылдығына арналған Қазақстан Республикасы ғылым қызметкерлері күніне арналған дәстүрлі халықаралық сәуір математикалық конференциясы (Қазақстан, Алматы қ., Математика және математикалық модельдеу институты, 3-5 сәуір 2019 ж., «Алгебра, математикалық логика және геометрия» секциясы);

– Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор М.И.Рамазановтың 70 жылдығына арналған «Математика, механика және информатиканың теориялық және қолданбалы мәселелері» атты халықаралық ғылыми конференция (Қазақстан, Қарағанды қ., академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, 12-13 маусым 2019 ж.);

– the 16th Asian Logic Conference (Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Назарбаев Университеті, 17-21 маусым 2019 ж.);

– «Eurasian Mathematical Journal» журналының 10 жылдығына арналған халықаралық конференция (Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Гумилев атындағы ЕҰУ, 16-19 қазан 2019 ж.);

– «Мальцев оқулары» халықаралық ғылыми конференциясы (Ресей, Новосибирск қ., 16-20 қараша, 2020 ж.);

– ҚР ҰҒА академигі Т.Ш. Қалменовтың 75 жылдығына арналған Қазақстан Республикасы ғылым қызметкерлері күніне арналған дәстүрлі халықаралық сәуір математикалық конференциясы (Қазақстан, Алматы қ., Математика және математикалық модельдеу институты, 5-8 сәуір 2021 ж., «Алгебра, математикалық логика және геометрия» секциясы);

– «Мальцев оқулары» халықаралық ғылыми конференциясы (Ресей, Новосибирск қ., 20-24 қыркүйек, 2021 ж.);

– профессор Т.Ғ. Мұстафиннің 80 жылдығына арналған «Математика, механика және информатиканың өзекті мәселелері» атты халықаралық ғылыми конференция (Қазақстан, Қарағанды қ., 8-9 қыркүйек 2022 ж.);

– «Математикалық логика және информатика» халықаралық ғылыми конференциясы (Қазақстан, Астана қ., 7-8 қазан 2022 ж.);

– Университеттің 85 жылдығына арналған III халықаралық «Тайман оқулары» «Қазіргі заманғы математика: мәселелер мен қосымшалар» (Қазақстан, Қызылорда қ., 25 қараша 2022 ж.).

Сондай-ақ, алынған нәтижелер академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университетінің профессор Т.Ғ. Мұстафин атындағы алгебра, математикалық логика және геометрия кафедрасының ғылыми семинарында баяндалып, талқыланды (ғылыми жетекші – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Ешкеев А.Р.).

**Жарияланымдар.** Диссертацияның негізгі нәтижелері 18 жұмыста жарияланды: 2 мақала – Scopus базасында индекстелетін журналда («Lobachevskii Journal of Mathematics» журналында, Процентиль – 55, «Bulletin of the Karaganda university-Mathematics» журналында, Процентиль – 35), 5 мақала Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған журналдарда және 11 жұмыс халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында жарияланды.

Бірлескен авторлармен орындалған жұмыстарда бірлескен авторлардың әрқайсысының үлесі тең болып табылады.

**Диссертацияның құрылымы мен көлемі.** 68 беттен тұратын диссертациялық жұмыс келесі құрылымдық элементтерден тұрады: кіріспе, үш бөлім, қорытынды, пайдаланылған дереккөздер тізімі. Анықтамалар мен тұжырымдардың нөмірленуі үш индекстен тұрады: бірінші индекс – бөлім нөмірі, екіншісі – параграф нөмірі, үшінші – осы параграфтағы анықтаманың немесе тұжырымның меншікті нөмірі.

**Пайдаланылған дереккөздер саны** – 70.

**Кілт сөздер.** Йонсондық теория, кемел мұрагер йонсондық теория,  $\varphi(x)$ -дөңес теория,  $J$ - $\varphi(x)$ -дөңес теория, йонсондық фрагмент, ядролық

модель, централдық тип, қатты минималды формула және теория,  
*APA* – жиын, елеулі базасы, кемел мұрагер йонсондық спектр.