

МУСИНА НАЗЕРКЕ МУХТАРАМКЫЗЫ

**ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КОМПАЬОНОВ
ГИБРИДОВ ЙОНСОНОВСКИХ ТЕОРИЙ**

АННОТАЦИЯ

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 6D060100 - Математика**

Актуальность темы. Данная работа представляет одно из последних основных направлений теории моделей. Теория моделей сегодняшний день является отдельным разделом математической науки. Как и любая наука, теория моделей имеет свое поле изучения. Основными объектами исследования являются модели (структуры, алгебраические системы). Основным инструментом исследования считается язык математической логики, а именно исчисление предикатов. Основным понятием, заимствованным из математической логики, является формальный язык.

Известный в этой области ученый Дж. Кейслер разделил теорию моделей на две существенные направления: «восточная » и «западная». Эти названия носят условный характер. То есть первые создатели теории моделей А.Робинсон и А. Тарский осуществляли свою профессиональную карьеру на восточном и западном берегах США соответственно. У каждого из упомянутых направлений есть свои особенности: «западное» направление часто начиналось с задач математического анализа и теории множеств, «восточное» направление часто начиналось с задач универсальной алгебры.

Результат этой работы, благодаря своему содержанию, относится к теории моделей «восточного» направления. Объектами этого направления являются йонсоновские теории и классы их моделей. Самым необычным из этих объектов является: теории, вообще говоря, неполные, а некоторые подклассы рассматриваемых моделей даже не элементарны, но поскольку изучать такие теории вообще очень сложно, специалисты всегда рассматривают объем исследования в эти два случая со следующими условиями. Теории пополнимые, а также классы их экзистенциально замкнутых моделей становятся элементарными, когда эти теории совершенны.

Одним из новых направлений в изучении йонсоновских теорий является тема гибридов йонсоновских теорий. В данной работе рассматриваются теоретико-модельные свойства нового класса йонсоновских теорий, а именно теории, полученные с помощью различных алгебраических конструкций семантических моделей двух совершенно разных йонсоновских теорий одного языка. Такие теории назывались гибридами.

В диссертационной работе исследуются теоретико-модельные свойства различных компаньонов фиксированных гибридов. К таким свойствам теорий относятся почти все классические атрибуты современной теории моделей, такие как стабильность, категоричность, жесткая минимальность, полнота модели, аксиоматизация, интерпретация, спектральные задачи и т.д. Что

касается семантического аспекта, нас интересуют различные свойства, связанные с концепцией определимых формульных подмножеств семантической модели гибрида по отношению к следующим понятиям: атомность, алгебраическая простота, экзистенциальная замкнутость, выпуклость. Еще одна уникальная особенность теорий — экзистенциальная простота. Согласно данной работе, эти условия всегда выполняются для рассматриваемых объектов.

Учитывая вышеизложенное, актуальность и новизна данной темы не вызывает сомнений.

Цель работы. Основной целью диссертационной работы является изучение теоретико-модельных свойств компаньонов гибридов йонсоновских теорий. При этом изучаются синтаксические и семантические подобию гибридов, гибриды позитивных йонсоновских теорий, специальные подклассы малых моделей гибридов йонсоновских теорий.

Задачи исследования. Гибриды йонсоновских теорий, поскольку представляют собой новую понятие, до сих пор остаются в значительной степени неисследованными объектами. Наша главная цель — максимально изучить этот новый объект по теоретико-модельным свойствам. В этом направлении мы попытались изучить гибриды йонсоновских теорий в рамках следующих известных теоретико-модельных понятий. Если перечислять эти свойства, то они упомянуты в предыдущем абзаце. Однако в данной диссертационной работе мы рассмотрели следующие результаты:

- 1) Рассмотреть модельную совместность и ω -категоричность в классе экзистенциально простых выпуклых $\forall\exists$ -полных йонсоновских теорий.
- 2) Получить результат, связанный с теоретико-модельными свойствами специальных подмножеств семантической модели некоторой фиксированной йонсоновской теории.
- 3) Рассмотреть модельную совместность и ω -категоричность гибридов фрагментов позитивно йонсоновских теорий.
- 4) Рассмотреть особенность связи между внешним и внутренним мирами для двух экзистенциально замкнутых моделей йонсоновской теории.
- 5) Получить критерий несчетной категоричности на языке сильной минимальности центрального типа наследственного класса косемантической фиксированного робинсоновского спектра.
- 6) Получить критерий синтаксического подобия гибридов классов косемантической йонсоновского спектра аксиоматизируемого класса моделей счетного языка фиксированной сигнатуры.
- 7) Изучить условие существования некоторой синтаксически подобной теории полигонов для любого совершенного йонсоновского гибрида.

Объект исследования — гибриды йонсоновских теорий и их классы моделей. В частности, теоретико-модельные свойства компаньонов гибридов йонсоновских теорий.

Предмет исследования: Йонсоновские теории и связанные с ними их классы моделей.

Методика исследования.

К методам исследования диссертации относятся все классические методы теории моделей, а также семантический метод, который в последнее время стремительно развивается. Смысл этого метода заключается в копировании свойств исчисления предикатов первого порядка в саму эту теорию рассматриваемой йонсоновской теории. Кроме того, используются семантические методы изучения компаньонов гибридов йонсоновских теорий.

Научная новизна.

Поскольку все понятия, относящиеся к данной теме, являются вновь определенными понятиями, все полученные и опубликованные результаты не имеют аналогов в силу общности задач данной диссертации.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Прежде всего, полученные результаты имеют теоретическое значение по своему содержанию. Во-вторых, результаты, полученные в диссертации, вполне могут способствовать развитию основ теории моделей. Ведь все задачи в этой диссертации, имея «восточное» направление, во многом означают обобщение и уточнение.

Положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся:

- 1) Рассмотрены модельная совместность и ω -категоричность в классе экзистенциально простых выпуклых $\forall\exists$ -полных йонсоновских теорий.
- 2) Получен результат, связанный с теоретико-модельными свойствами специальных подмножеств семантической модели некоторой фиксированной йонсоновской теории. Гибрид рассматриваемых фрагментов имеет модель, которая содержит специальное ядерное подмножество, определенное замыкание, которого дает некоторую экзистенциально замкнутую модель, являющуюся алгебраической простой моделью рассматриваемой теории.
- 3) Рассмотрены модельная совместность и ω -категоричность гибридов фрагментов позитивно йонсоновских теорий.
- 4) Рассмотрена особенность связи между внешним и внутренним мирами для двух экзистенциально замкнутых моделей йонсоновской теории.
- 5) Получен критерий несчетной категоричности на языке сильной минимальности центрального типа наследственного класса косемантической фиксированного робинсоновского спектра.
- 6) Получен критерий синтаксического подобия гибридов классов косемантической йонсоновского спектра аксиоматизируемого класса моделей счетного языка фиксированной сигнатуры.
- 7) Изучено условие существования некоторой синтаксически подобной теории полигонов для любого совершенного йонсоновского гибрида.

Достоверность и обоснованность обеспечивается конструктивностью используемых методов. Общие выводы представлены в виде теорем и представлены их доказательства.

Апробация работы.

- Основные результаты диссертации были подтверждены и обсуждены

на следующих конференциях и семинарах:

- VII Franco-Kazakh Colloquium in Model Theory (14-18 November 2022, Camille Jordan Institute, Claude Bernard Lyon University, Lyon, France);

- Logic Colloquium 2019: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) (11-16 August 2019, Prague, Czech Republic);

- Logic Colloquium 2021: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) (19-24 July 2021, Poznan, Poland);

- Logic Colloquium 2022: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) (June 27 – July 1, 2022, Reykjavik, Iceland);

- 16th Asian Logic Conference (17-21 June 2019, Nur-Sultan, Republic of Kazakhstan);

- Мальцевские чтения: международная конференция (19-22 ноября 2018 г., Новосибирск, Россия);

- Мальцевские чтения: международная конференция (16-20 ноября 2020 г., Новосибирск, Россия);

- Мальцевские чтения: международная конференция (20-24 ноября 2021 г., Новосибирск, Россия);

- Традиционная международная апрельская математическая конференция (3-5 апреля 2019, Институт математики и математического моделирования, Алматы, Республика Казахстан);

- Традиционная международная апрельская математическая конференция (апрель 2020, Институт математики и математического моделирования, Алматы, Республика Казахстан);

- Традиционная международная апрельская математическая конференция (апрель 2021, Институт математики и математического моделирования, Алматы, Республика Казахстан);

- Международная конференция, посвященная 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal» (16-19 октября 2019, Нур-Султан, Республика Казахстан);

- Международная научная конференция «Математическая логика и компьютерные науки» (7-8 октября 2022 г., Астана, Республика Казахстан);

- Международная научно-практическая конференция «Таймановские чтения – 2022», посвященная 105-летию доктора физико-математических наук, академика А.Д. Тайманова и 90-летию Западно-Казахстанского университета им. М. Утемисова (30 ноября, 2022 г., Уральск, Республика Казахстан);

- IX международная научная конференция (24-28 мая 2022 г., Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Республика Казахстан);

- Международная научная конференция «Актуальные проблемы математики, механики и информатики», посвященная 80-летию профессора Т.Г. Мустафина (8-9 сентября 2022 г., Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, г. Караганда, Республика Казахстан);

- XV Международная научная конференция студентов и молодых ученых «GYLYM JÁNE BILIM - 2020», (2020, Нур-Султан, Республика Казахстан);

- Доклады были сделаны в лаборатории «Математическая логика» на семинаре Института прикладной математики Карагандинского университета имени академика Е.А. Букетова.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 28 работах: 1 статья - в журнале, входящая в базу Scopus, 6 статей - в журналах, рекомендованных комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, и 21 работа - в материалах международных научных конференций.

В работах, выполненных с соавторами, вклад каждого из соавторов является равным.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа объемом 83 страницы состоит из следующих структурных элементов: введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников.

Диссертационная работа состоит из двух глав, которые взаимосвязаны между собой. В первой главе диссертации представлены определения и теоремы основных понятий теории моделей, необходимые для описания теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий. В этой главе в рамках изучения йонсоновских теорий, которые, вообще говоря, являются неполными, рассматриваются классические вопросы теории моделей, такие как, категоричность, полнота, синтаксическое и семантическое подобие. В частности, изучаются вопросы счетной и несчетной категоричности класса косемантической йонсоновского спектра произвольной модели рассматриваемой сигнатуры. Также рассматривается целый класс теорий, связанный с классом фиксированных моделей неполной теории, который называется йонсоновским спектром этого класса. Эти теории отличаются друг от друга вплоть до определенного бинарного отношения, которое является обобщением, а в некоторых случаях даже уточнением классического понятия отношения эквивалентности между моделями. Помимо этого в работе приведены теоремы, связанные с классическими теоремами теории моделей (М. Морли, Д. Сарацино и П. Линдстрем) в рамках изучения йонсоновских спектров специальных классов структур. Поскольку новым и актуальным методом изучения йонсоновских теорий является изучение теорий с использованием синтаксических и семантических подобий, в этой главе рассматриваются синтаксические и семантические подобия для полных теорий и для йонсоновских теорий.

Вторая глава диссертации является основной. В этой главе рассматриваются теоретико-модельные свойства гибридов йонсоновских теорий, т.е. описываются малые модели гибридов специальных подклассов йонсоновских теорий, гибриды позитивных йонсоновских теорий, геометрия теоретических множеств фрагментов гибридов и синтаксические и семантические подобия гибридов. При этом рассматриваются теоретико-модельные свойства алгебры центральных типов взаимно модельно-совместных фрагментов. В этом параграфе описываются внешний и

внутренний мир экзистенциально-замкнутой модели йонсоновской теории, λ -сравнение двух экзистенциально-замкнутых моделей и алгебра центрального типа.

Количество использованных источников - 71.

Ключевые слова. Йонсоновская теория, семантическая модель, экзистенциально замкнутая модель, экзистенциально простотая теория, модельный компаньон, гибрид йонсоновских теорий, фрагмент, модельно совместная теория.