

**Мусина Назерке Мухтарамқызының**

**ЙОНСОНДЫҚ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ ГИБРИДТЕРІНІҢ  
КОМПАНЬОНДАРЫНЫҢ МОДЕЛЬДІ-ТЕОРЕТИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ**

**6D060100 – Математика мамандығы бойынша философия  
докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияның**

**АННОТАЦИЯСЫ**

**Тақырыптың өзектілігі.** Бұл жұмыс кейінгі кезде пайда болған модельдер теориясының негізгі бір бағыты болып есептелінеді. Модельдер теориясы бүгінгі таңда математика ғылымының жеке бөлімі. Кез келген ғылым секілді моделдер теориясы да өзінің зерттеу өрісі бар. Зерттеудің негізгі объектілері модельдер (структуралар, алгебралық жүйелер). Ең негізгі зерттеу құралы болып математикалық логиканың тілі саналады, нақтырақ айтсақ бірінші реттегі предикаттық есептеу. Бұл жұмыста біздің бір келісім шартты – қарастырылған нәтижелер саналымды тілдің аясында алынған.

Белгілі математикалық логиканың майталманы Дж. Кейслер модельдер теориясын екі елеулі бағытқа бөлді, олар: «шығыс» және «батыс». Бұл есімдер шартты түрде қойылған. Яғни, модельдер теориясының алғашқы құрушылар А.Робинсон және А.Тарский сәйкесінше АҚШ-тың шығыс және батыс жағаларында өздерінің кәсіби мансабын жүзеге асырған. Айтылған бағыттардың әрқайсысының өзінің жеке ерекшеліктері көп: «батыс» бағыты көбінесе математикалық талдау және жиындар теориясының есептерінен басталған, «шығыс» бағыты көбінесе алгебра мәселелерінен басталды.

Бұл диссертациялық жұмыстың нәтижесі өзінің мазмұнына байланысты «шығыс» модельдер теориясына жатады. Осы бағытқа тиісті объектілер йонсондық теориялар және олардың модельдерінің кластары. Ең ерекше осы объектілердің негізгісі: теориялар, жалпы айтқанда толық емес және қарастырылып отырған модельдердің кейбір ішкі кластары тіпті элементарлы емес, бірақ жалпы түрде осындай теорияларды зерттеу өте қиын болғандықтан мамандар әрқашанда осы екі жағдай бойынша зерттеудің аясын келесі шарттармен қарастырады. Теориялар дербес толықтылыққа ие болады, сонымен қатар осы теорияларды кемел түрге келтіргенде олардың экзистенциалды тұйық модельдерінің кластары элементарлы болады.

Йонсондық теорияларды зерттеудегі жаңа бағыттардың бірі - йонсондық теориялардың гибридтері тақырыбы. Бұл жұмыста йонсондық теориялардың жаңа класының модельді-теоретикалық қасиеттері, атап айтқанда бір тілдің екі мүлдем басқа йонсондық теорияларының семантикалық модельдерінің әртүрлі алгебралық конструкцияларының көмегімен алынған теориялар қарастырылады. Мұндай теориялар гибридтер деп аталды.

Диссертациялық жұмыста бекітілген гибридтердің әртүрлі компаньондарының модельді-теоретикалық қасиеттері зерттеледі. Теориялардың мұндай қасиеттеріне қазіргі модельдер теориясының барлық

дерлік классикалық атрибуттары жатады, мысалы, тұрақтылық, категорлылық, қатты минималдылық, модельді толықтық, аксиоматизациялау, интерпретациялау, спектрлік мәселелер және т.б. Семантикалық аспектіге келетін болсақ, бізді келесі ұғымдарға қатысты гибридтің семантикалық моделінің анықталатын формулалық ішкі жиындары тұжырымдамасымен байланысты әртүрлі қасиеттер қызықтырады: атомдық, алгебралық жайлылық, экзистенциалдық тұйықтық, дөңестік. Теориялардың тағы да дербес қасиеті ол - экзистенциалды жайлылық. Бұл жұмыс бойынша әрқашанда осы айтылған шарттар қарастырылып отырған объектілерге орындалады.

Жоғарыда айтылғандарды ескере отырып, бұл тақырыптың өзектілігі мен жаңалығы күмән тудырмайды.

**Жұмыстың мақсаты.** Диссертацияның негізгі мақсаты йонсондық теориялардың гибридтерінің компаньондарының модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттеу болып табылады. Сонымен бірге гибридтердің синтаксистік және семантикалық ұқсастықтары, позитивті йонсондық теориялардың гибридтері, йонсондық теориялардың гибридтерінің кішігірім модельдерінің арнайы ішкі кластары зерттеледі.

#### **Зерттеу міндеттері.**

Йонсондық теориялардың гибридтері жаңа ұғым болғаннан кейін көп жағынан әлі зерттелмеген объектілер. Біздің негізгі мақсатымыз осы жаңа объектіні қолымыздан келгенше неғұрлым модельді-теоретикалық қасиеттер бойынша зерттеу. Осы бағыт бойынша біз йонсондық теориялардың гибридтерін келесі белгілі модельді-теоретикалық ұғымдар аясында зерттеуге тырыстық. Егер осы қасиеттерді тізімдесек, олар алдыңғы пункте айтылған. Дегенмен, біз осы диссертациялық жұмыста келесі нәтижелерді қарастырдық:

- 1) Экзистенциалды жай дөңес  $\forall\exists$ -толық йонсондық теориялардың класындағы модельді үйлесімділігі мен  $\omega$ -категорлылығын қарастыру.
- 2) Кейбір бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің арнайы ішкі жиындарының модельді-теоретикалық қасиеттеріне байланысты нәтиже алу.
- 3) Позитивті йонсондық теориялардың фрагменттерінің гибридтерінің модельді үйлесімділігі мен  $\omega$ -категорлылығын қарастыру.
- 4) Йонсондық теорияның екі экзистенциалды тұйық модельдері үшін сыртқы және ішкі дүниелер арасындағы байланыстың ерекшелігін қарастыру.
- 5) Бекітілген Робинсон спектрінің мұрагер косемантылық класының централдық типінің қатты минималдылығы тілінде саналымсыз категорлылықтың критерийін алу.
- 6) Бекітілген сигнатураның саналымды тілінің модельдерінің аксиоматизацияланатын класының йонсондық компаньонының косеманттылық кластарының гибридтерінің синтаксистік ұқсастығының критерийін алу.
- 7) Кез келген кемел йонсондық гибрид үшін кейбір синтаксистік ұқсас полигон теорияларының табылуын зерттеу.

**Зерттеу нысаны:** Зерттеу нысаны болып йонсондық теориялардың гибридтері мен олардың модельдер кластары болып табылады. Атап айтқанда, йонсондық теориялардың гибридтерінің компаньондарының модельді-теоретикалық қасиеттері.

**Зерттеу пәні:** Зерттеу пәні – йонсондық теориялар және оларға тиісті модельдердің кластары.

**Зерттеу әдістері.** Диссертацияның зерттеу әдістеріне модельдер теориясының барлық классикалық әдістері және сондай ақ соңғы уақытта белсенді түрде қолданып жатқан семантикалық әдісі жатады. Бұл әдістің мағынасы бірінші ретті предикаттар есептеуінің қасиеттерін қарастырылып отырған йонсондық теорияның осы теорияның өзіне көшіру болып табылады. Сонымен қатар, йонсондық теориялардың гибридтерінің компаньондарын оқып-зерттеудің семантикалық әдістері қолданылады.

**Ғылыми жаңалық.** Бұл тақырыпқа сай барлық ұғымдар жаңадан анықталған ұғымдар болып табылғаннан кейін, алынған және жарияланған барлық нәтижелер осы диссертацияның мақсаттарының жалпылығына байланысты аналогтары жоқ.

**Жұмыстың теориялық және практикалық құндылығы.** Біріншіден, алынған тұжырымдар өзінің сипаты бойынша теоретикалық құндылығын атқарады. Екіншіден, диссертациялық жұмыстағы алынған нәтижелер өзінің негізгісі бойынша модельдер теориясының іргетас тұғырын дамытуға өз үлесін қосуға әбден ықтимал. Өйткені, бұл диссертациялық жұмыстағы барлық есептердің ұстамалары, «шығыс» бағытқа ие болғаннан кейін көп жағынан жалпылама және нақтылаулықты білдіреді.

#### **Қорғауға шығарылатын ережелер.**

Қорғауға шығарылады:

- 1) Экзистенциалды жай дөңес  $\forall\exists$ -толық йонсондық теориялардың класындағы модельді үйлесімділігі мен  $\omega$ -категорлылығы қарастырылды.
- 2) Кейбір бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің арнайы ішкі жиындарының модельді-теоретикалық қасиеттеріне байланысты нәтиже алынды. Қарастырылып отырған фрагменттердің гибридтінің құрамында арнайы ядролық ішкі жиын, анықталған тұйықталу бар, ол қарастырылып отырған теорияның алгебралық жай моделі болып табылатын кейбір экзистенциалды тұйық модельмен берілді.
- 3) Позитивті йонсондық теориялардың фрагменттерінің гибридтерінің модельді үйлесімділігі мен  $\omega$ -категорлылығы қарастырылды.
- 4) Йонсондық теорияның екі экзистенциалды тұйық модельдері үшін сыртқы және ішкі дүниелер арасындағы байланыстың ерекшелігі қарастырылды.
- 5) Бекітілген Робинсон спектрінің мұралы косемантылық класының централдық типінің қатты минималдылығы тілінде саналымсыз категорлылықтың критерийі алынды.
- 6) Бекітілген сигнатураның саналымды тілінің модельдерінің аксиоматизацияланатын класының йонсондық компаньонының косемантылық кластарының гибридтерінің синтаксистік ұқсастығының

критерийі алынды.

7) Кез келген кемел йонсондық гибрид үшін кейбір синтаксистік ұқсас полигон теорияларының табылуы зерттелді.

**Жүргізілген зерттеулердің дұрыстығы мен негізділігі** пайдаланылған әдістердің конструктивтілігімен қамтамасыз етіледі. Жалпы тұжырымдар теоремалар түрінде берілген және олардың дәлелдеулері ұсынылған.

#### **Жұмыстың апробациясы.**

Диссертацияның негізгі нәтижелері келесі конференциялар мен семинарларда дәлелденді және талқыланды:

- VII Franco-Kazakh Colloquium in Model Theory VII Franco-Kazakh Colloquium in Model Theory (14-18 қараша 2022 жыл, Клод Бернард Лион 1 университеті, Камилла Джордан институты, Лион қ., Франция Республикасы);

- Logic Colloquium 2019: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) (11-16 тамыз 2019, Прага қ., Чехия Республикасы);

- Logic Colloquium 2021: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) (19-24 шілде 2021, Познань қ., Польша);

- Logic Colloquium 2022: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) (27 маусым - 1 шілде 2022, Рейкьявик университеті, Рейкьявик қ., Исландия);

- 16th Asian Logic Conference (17-21 маусым 2019, Назарбаев университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан Республикасы);

- Мальцев оқулары халықаралық конференция (19-22 қараша 2018, Новосибирск мемлекеттік университеті, Новосибирск қ., Ресей);

- Мальцев оқулары халықаралық конференция (16-20 қараша 2020, Новосибирск мемлекеттік университеті, Новосибирск қ., Ресей);

- Мальцев оқулары халықаралық конференция (20-24 қараша 2021, Новосибирск мемлекеттік университеті, Новосибирск қ., Ресей);

- Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (3-5 сәуір 2019, ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан Республикасы);

- Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (сәуір 2020, ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан Республикасы);

- Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (сәуір 2021, ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан Республикасы);

- «Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (EMJ-2019) халықаралық конференция (16-19 қазан 2019, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан Республикасы);

- «Математикалық логика және компьютерлік ғылымдар» халықаралық ғылыми конференция (7-8 қазан 2022, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан Республикасы);

- «Тайманов оқулары – 2022»: халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференция (30 қараша 2022 жыл, М. Өтемісов атындағы Батыс Қазақстан

университеті, Орал қ., Қазақстан Республикасы);

- IX халықаралық ғылыми конференция (24-28 мамыр 2022, Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан Республикасы);

- Профессор Т.Ғ. Мұстафиннің 80 жылдығына арналған «Математика, механика және информатиканың өзекті мәселелері» халықаралық ғылыми конференция (8-9 қыркүйек 2022 жыл, академик Е.А. Бөкетов ат. Қарағанды Университеті, Қарағанды қ., Қазақстан Республикасы);

- Студенттер мен жас ғылымдардың «GYLYM JÁNE BILIM - 2020» XV халықаралық ғылыми конференция (10 сәуір 2020, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан Республикасы);

- Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университетінің Қолданбалы математика институтының семинарында ішіндегі «Математикалық логика» лабораториясында.

### **Жарияланымдар.**

Диссертацияның негізгі нәтижелері 28 жұмыста жарияланды: 1 мақала - Scopus базасында индекстелетін журналда, 6 мақала Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған журналдарда және 21 жұмыс халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында жарияланды.

Бірлескен авторлармен орындалған жұмыстарда бірлескен авторлардың әрқайсысының үлесі тең болып табылады.

### **Диссертацияның құрылымы мен көлемі.**

83 беттен тұратын диссертациялық жұмыс келесі құрылымдық элементтерден тұрады: кіріспе, екі бөлім, қорытынды, пайдаланылған дереккөздер тізімі.

Диссертациялық жұмыс екі тараудан тұрады және олар бір-бірімен тығыз байланысты. Диссертациялық жұмыстың бірінші тарауында йонсондық теориялардың модельді-теоретикалық қасиеттерін сипаттауға қажетті модельдер теориясының негізгі ұғымдарының анықтамалары мен теоремалары көрсетілген. Бұл тарауда йонсондық теорияның, жалпы айтқанда, толық емес теорияларды зерттеу аясында категорлылық, толықтық, синтаксистік және семантикалық ұқсастық сияқты модельдер теориясының классикалық мәселелері қарастырылды. Атап айтқанда, бұл тарауда қарастырылатын сигнатураның кез келген моделінің йонсондық спектрінің косемантылық класының саналымды және саналымды емес категорлылық мәселелері сипатталды. Сонымен бірге, жалпы айтқанда, толық емес теорияның бекітілген модельдер класына бір ғана теорияны емес, тұтас теориялар класы байланыстырылды, ол осы класстың йонсондық спектрі деп аталады. Бұл теориялар бір-бірінен белгілі бинарлық қатынасқа дейін ерекшеленеді, бұл модельдер арасындағы эквиваленттік қатынастың классикалық тұжырымдамасын жалпылау және кейбір жағдайларда тіпті нақтылау болып табылады. Және де, структуралардың ерекше кластарының йонсондық спектрлерін зерттеу аясында модельдер теориясының классикалық теоремаларына (М. Морли, Д. Сарацино және П. Линдстрем) қатысты теоремалар берілген. Йонсондық теорияларды зерттеудің жаңа және өзекті әдісі

теорияларды синтаксистік және семантикалық ұқсастықтарды қолдана отырып зерттеу болғандықтан осы тарауда синтаксистік және семантикалық ұқсастықтар толық теориялар үшін және йонсондық теориялар үшін қарастырылды.

Диссертациялық жұмыстың екінші тарауы негізгі тарау болып табылады. Бұл тарауда йонсондық теориялардың гибридтерінің модельді-теоретикалық қасиеттері қарастырылған. Яғни, йонсондық теориялардың арнайы ішкі кластары гибридтерінің кішігірім модельдері, позитивті йонсондық теориялардың гибридтері, гибридтердің фрагменттерінің теоретикалық жиындарының геометриясы мен гибридтердің синтаксистік және семантикалық ұқсастықтары сипатталған. Сонымен бірге өзара модельді-үйлесімді фрагменттердің централдық типтерінің алгебрасының модельді-теоретикалық қасиеттері қарастырылған. Бұл тарауда йонсондық теорияның экзистенциалды тұйық моделінің сыртқы және ішкі әлемдері, екі экзистенциалды тұйық модельдердің  $\lambda$ -салыстыруы, централдық типтің алгебрасы сипатталған.

**Пайдаланылған дереккөздер саны - 71.**

**Кілт сөздер.** Йонсондық теория, семантикалық модель, экзистенциалды тұйық модель, экзистенциалды жай теория, модельді компаньон, йонсондық теориялардың гибридi, фрагмент, модельді үйлесімді теория.