ОТЗЫВ
зарубежного научного консультанта
на диссертационную работу
Жумабековой Галии Еркиновны
на тему «Йонсоновские пары в допустимых обогащениях»,
представленную на соискание степени доктора философии (PhD)
по образовательной программе «8D05401-Математика»

Диссертационная работа, выполненная Жумабековой Г.Е., посвящена исследованию теоретико-модельных вопросов йонсоновских пар в допустимом обогащении. Целью работы является исследование понятия наследственности при допустимых обогащениях йонсоновских теорий и йонсоновских спектров, а также семантических пар на языке центральных типов.

Данная работа относится к теории моделей – одного из разделов математической логики, который имеет фундаментальные связи между синтаксическими свойствами множеств предложений формального языка, с одной стороны, и семантическими свойствами их моделей с другой. Всем, кто занимается в области теории моделей, известно, что в США в связи с географическим местом проживания двух основоположников теории моделей Альфреда Тарского и Абрахама Робинсона выделяют «западную» и «восточную» теорию моделей. Эти названия естественно условны, при этом тематика данной работы относится к «восточному» направлению теории моделей. Основы и задачи этого направления были определены и заданы основателем «восточной» теории моделей А. Робинсоном. Заметим, что йонсоновские теории, являясь естественным подклассом класса индуктивных теорий по своей сути, являются, вообще говоря, неполными. Таким образом, изучение йонсоновских теорий по отношению к полным теориям, изучением которых занимается «западная» теория моделей, по своей сути в силу неполноты является менее адекватной для использования понятий и результатов из арсенала полных теорий. В связи с этим, задача переопределения и нахождения аналогов соответственно понятий и результатов из атрибутов полных теорий является актуальной, интересной, но в то же время достаточно сложной.

Заметим, что до сих пор нерешенной проблемой является проблема характеризации понятия наследственности йонсоновской теории.

В данной работе рассматриваются йонсоновские теории, связанные со стабильностью. До сих пор элементарные пары изучались в полных теориях, а в работе Жумабекой Г.Е. следует отметить, что полученные результаты выполнены для неполных, то есть для йонсоновских пар.

Заметим, что основные результаты, полученные в рамках изучения йонсоновских пар, сохраняют йонсоновость в допустимым обогащении, причем эти обогащения сохраняют определимость типов, вообще говоря, не для стабильности классического типа, а рамках йонсоновской стабильности.

Выделим основные результаты данной диссертации.

1. Получены свойства сильно минимальных множеств, определяющих специальную йонсоновскую геометрию и заданных оператором замыкания:

Теорема 1.4.4 Для любого $\Delta \in [T], \nabla = \exists$, если $\varphi(\bar{x}) \in \nabla$, формула языка L, то следующие условия эквивалентны:

1. $\psi(A)$ – J-сильно минимальное множество, где $A \in E_T$;

2. для каждой экзистенциально замкнутой модели $B \in E_\Delta$ множество $\psi(A)$ является J-минимальным множеством в модели B;

3. множество $\psi(C)$ – J-минимально в модели C.

2. В рамках изучения совершенной наследственной йонсоновской теории относительно теоретико-модельных свойств фрагментов специальных подмножеств получены результаты в допустимых обогащениях:

Теорема 1.5.2. Пусть T модулярная выпуклая йонсоновская теория, полная для $\forall\exists$-предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T^* ω- категорична;

2) T_A^C ω- категорична,

где, T_A^C- теория в допустимом обогащении, T^* - центр теории T_A^C.

Теорема 1.5.5. Пусть T модулярная выпуклая йонсоновская теория, полная для $\forall\exists$-предложений, для которого выполняется R_1. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) теория T^* ω_1-категорична,

2) любая счетная модель в $E_{T_A^C}$ имеет алгебраически простое расширение модели в $E_{T_A^C}$.

3. В рамках изучения наследственных йонсоновских теорий, в допустимых обогащениях, получены некоторые теоретико-модельные свойства наследственных гибридов йонсоновских теорий:

Теорема 2.1.4. Пусть T_1, T_2 – наследственные йонсоновские теории одной сигнатуры σ. $\sigma' = \sigma \cup P \cup \{c\}$. C_1 – семантическая модель теории T_1, C_2 – семантическая модель теории T_2, $P(C_1) = M_1 \in E_{T_1}$, $P(C_2) = M_2 \in E_{T_2}$. Пусть $T_1 \bowtie T_2$ (косемантичны) и $T_3 = Th_{\forall\exists}(M_1 \times M_1)$, где T_3 есть гибрид T_1 и T_2.

Если T_1 – $J - P$-стабильная теория, T_2 - $J - P - \lambda$-стабильная теория, тогда T_3 - $J - P - \lambda$-стабильная теория.

4. Получены некоторые теоретико-модельные свойства $P - \lambda$-стабильных и наследственных теорий относительно гибридов в допустимом обогащении:

Теорема 2.1.6. Пусть T_1 йонсоновская теория, $T_2 = Th_{\forall\exists}(C,\ P(C), c_x) \cup T_1$, C - семантическая модель теории T_1, $P(C) = M \preccurlyeq_1 C$, $M \in E_T$. Пусть $c_x \in \sigma_T$. Если T_1, T_2 $-$ $J-P$-стабильные теории, тогда гибрид $H(T_1, T_2)$ является $J-P$-стабильной теории.

5. Для наследственных йонсоновских $J-$ стабильных теорий получен критерий эквивалентности семантических пар для йонсоновского спектра:

Теорема 2.2.2.
Пусть $K = \{(C,M) | M \preccurlyeq_{\exists_1} C, (C,M) -$ семантическая пара $\}$.
Рассмотрим йонсоновский спектр класса K:
$JSp(K) = \{\Delta | \Delta -$ йонсоновская теория, $\Delta = Th_{\forall\exists}(C,M)$, где $(C,M) \in K\}$, $[\Delta] \in JSp(K)\ /_{\bowtie}$. Пусть $[\Delta]$-$\exists$-полный и $J-\lambda$-стабильный класс, $C_{[\Delta]}$ её семантическая модель. Пусть $[\bar{\Delta}]$ класс есть класс $[\Delta]$ в допустимом обогащении, $[\bar{\Delta}]^*$- его центр. Пусть $(C_{[\Delta]}, M_1)$ и $(C_{[\Delta]}, M_2)$ две семантические пары, $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ кортежи, взятые каждой из них. Тогда $(C_{[\Delta]}, M_1) \equiv_{\forall\exists} (C_{[\Delta]}, M_2)$, если их центральные типы эквивалентны в фундаментальном порядке $[\bar{\Delta}]^*$.

6. В рамках изучения йонсоновского спектра получены свойства семантических пар и экзистенциального конечного покрытия (*e.f.c.p.*) для J $-$стабильного совершенного йонсоновского спектра:

Теорема 2.3.1. Пусть $[\Delta]$ – наследственный, $\exists$-полный совершенный и $J-\lambda$-стабильный класс. Пусть $\Delta' = \Delta \cup \{P, \subseteq\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $[\bar{\Delta}]^*$ не имеет *e.f.c.p.;*

2. Любая $|T|^+$-насыщенная модель является семантической парой.

3. Два кортежа $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$, взятые из моделей $[\bar{\Delta}]^*$, имеют один и тот же центральный тип тогда и только тогда, когда в смысле Δ' их типы над M эквивалентны в фундаментальном порядке $[\bar{\Delta}]^*$.

Теорема 2.3.2. Если $[\bar{\Delta}]^*$ не имеет *e.f.c.p.* и λ-стабильный класс, тогда $\Delta'\ J-\lambda$-стабильный и не имеет *e.f.c.p.*

7. В рамках изучения йонсоновского спектра получен результат относительно немультиразмерности:

Теорема 2.4.2. Пусть
$JSp(K) = \{\Delta | \Delta -$ йонсоновская теория, $\Delta = Th_{\forall\exists}(C,M)$, где $(C,M) \in K\}$ $[\Delta] \in JSp(K)\ /_{\bowtie}$. Пусть $[\Delta] - \exists$-полный и $J-\lambda$-стабильный класс, $C_{[\Delta]}$ $-$ её семантическая модель. Пусть $[\bar{\Delta}]$ класс есть класс $[\Delta]$ в допустимом обогащении, $[\bar{\Delta}]^*$- его центр. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $[\bar{\Delta}]^*$ $-$ немультиразмерностный (в классическом смысле);

2) $[\bar{\Delta}]$ $- J$ - немультиразмерностный.

Все полученные результаты были опубликованы в соответствующих рейтинговых журналах по базе Web of Science и Scopus, а также эти результаты докладывались на различных международных конференциях и научных семинарах по профилю диссертации.

Учитывая всё вышесказанное, необходимо отметить, что тематика выполненной работы является достаточно сложной и актуальной, и все основные результаты диссертации являются новыми, математически верно обоснованными и вносят вклад в развитие обоих направлений теории моделей.

Считаю, что диссертационная работа Жумабековой Галии Еркиновны на тему «Йонсоновские пары в допустимых обогащениях» соответствует всем требованиям, предъявляемым к диссертационным работам на соискание степени доктора философии (PhD) образовательной программе «8D05401-Математика», а ее автор заслуживает присуждения степени доктора философии (PhD).

Зарубежный научный консультант,
д.ф.-м.н., заместитель директора по науке
Института математики
им. С.Л. Соболева СО РАН,
профессор НГУ ______________ С.В. Судоплатов

28.02.2024