

ЖУМАБЕКОВА ГАЛИЯ ЕРКИНОВНА

«ЙОНСОНОВСКИЕ ПАРЫ В ДОПУСТИМЫХ ОБОГАЩЕНИЯХ»

АННОТАЦИЯ

диссертации, представленной на соискание степени доктора философии (PhD) по образовательной программе 8D05401-«Математика»

Актуальность темы. Данная диссертация относится к теории моделей, относящейся к отделу математической логики. Теория моделей сложилась, как отдельная наука, в 50-х годах прошлого века. Такие ученые, как Кейслер и Чен в своей знаменитой книге «Теория моделей», говорили, что теория моделей является мостом между универсальной алгеброй и математической логикой. Исторически развитие теории моделей тесно связано с именами математиков и логиков разных стран на протяжении нескольких поколений. Все мы знаем, что двух главных основоположников теории моделей в США, Альфреда Тарского и Абрахама Робинсона, можно разделить на «восточные» и «западные» модели в зависимости от их географического положения. Эти названия, конечно, условны, и тема моей диссертации связана с «восточным» направлением теории моделей. А. Робинсон, основоположник теории «происхождения» моделей, определил и выделил основы и задачи этого направления. Следует отметить, что йонсоновские теории по своей сути представляют собой специфический подкласс класса индуктивных теорий, вообще говоря, неполных. То есть при исследовании йонсоновских теорий по отношению к полным теориям, изучаемым теорией «западных» моделей, мы не можем использовать понятия и результаты, полученные из арсенала полных теорий, так как они заведомо неполны. В связи с этим, проблема переопределения и поиска аналогов понятий и результатов в полных теориях соответственно является актуальной и интересной, но в то же время достаточно сложной задачей.

Актуальность моей диссертационной работы связана также с исследованием теоретико-модельных свойств универсальной йонсоновской алгебры (т.е. удовлетворяющей йонсоновским условиям). Поскольку йонсоновская теория является неполной теорией, а методы исследования не так развиты, как для полной теории, поэтому любой результат, полученный для неполной теории, является новым. С точки зрения теории моделей направление и результаты более поздних йонсоновских теорий считаются более общими, чем модель классической теории. Поиск решения вопросов, направленных на обогащение языка сложившейся йонсоновской теории, связан с проблемами йонсоновских теорий. Известно, что существуют примеры, показывающие, что сигнатура данной йонсоновской теории не

сохраняется, когда сигнатура данной йонсоновской теории обогащена одним предикатом.

До сих пор нерешенной проблемой является проблема характеристики понятия наследственности йонсоновской теории. Актуальность данной проблемы подтверждается следующим важным контрпримером: элементарная теория алгебраически замкнутого поля после обогащения одноместным предикатом перестает быть йонсоновской. В связи с этим, изучение теоретико-модельных свойств центральных типов в обогащении предикатом представляет важную теоретико-модельную задачу для описания наследственных йонсоновских теорий.

В данной диссертации исследование теоретико-модельных свойств понятия наследственности с помощью центрального типа рассматривается не только на теориях, но и на йонсоновских спектрах. Понятие йонсоновского спектра содержит синтаксические и семантические инварианты всех классов своих экзистенциально замкнутых моделей. Переходя к изучению классов косемантической данного спектра, мы приступаем к изучению тех йонсоновских теорий, которые имеют одну и ту же семантическую модель. При допустимом обогащении языка данного спектра проблема наследственности сохраняется и для спектра, поэтому решив задачу для теории, мы можем рассматривать и более сложный вопрос наследственности йонсоновского спектра.

В то же время еще одним актуальным вопросом в работе, который можно назвать началом нашего исследования, стало определение свойств йонсоновских семантических пар. До сих пор известно, что элементарные пары доказаны как полные. Теперь, рассмотрев эти пары в допустимом обогащении, мы получим ответ на вопрос: теория такой пары сохраняет ли полноту или является ли йонсоновской?

Цель работы. Основной целью диссертационного исследования является описание синтаксических и семантических свойств заданных наследственных йонсоновских теорий, пар и центральные типы йонсоновских спектров с допустимостью в обогащении. Мы будем иметь дело с допустимым обогащением сигнатуры языка, которое сохраняет определимость типов при обогащенном варианте стабильности. И основным синтаксическим объектом исследования будет понятие наследственности йонсоновской теории. Напомним, что мы будем называть йонсоновскую теорию наследственной, если она остается йонсоновской при фиксированном допустимом обогащении. Мы должны также заметить, что такие синтаксические и семантические свойства теорий, спектров и их классов моделей относительно таких понятий, как выпуклость, полнота, модельная полнота, экзистенциальная простота, категоричность, модельная совместность, модельный компаньон, свойство конечного покрытия, сильная минимальность, будут изучаться на языке центральных типов в соответствующих обогащениях.

Задачи исследования. Содержанием данной работы является исследование следующих задач: получить некоторые теоретико-модельные свойства фрагментов специальных подмножеств в рамках изучения

совершенной наследственной йонсоновской теории в допустимых обогащениях; получить критерий ω -категоричности в изучении модулярных выпуклых и $\forall\exists$ -полных йонсоновских теорий; получить некоторые теоретико-модельные свойства наследственности теорий в рамках изучения наследственных йонсоновских теорий, состоящих из одной сигнатуры в допустимых обогащениях; получить свойства орбитальных типов и сильно минимальных множеств, определяющих специальную йонсоновскую геометрию и заданных оператором замыкания; получить результаты, связанные с J -сильно минимальными типами в семантической модели; получить некоторые теоретико-модельные свойства J - λ -стабильных и наследственных теорий; доказать обобщение стабильности для йонсоновского наследственного спектра, связывающее J - λ -стабильность и классическую стабильность; получить основные свойства семантических пар и e.f.c.p. для J - λ -стабильного совершенного йонсоновского спектра.

Объект исследования. Объектом исследования являются йонсоновские теории, а также J -стабильные и наследственные йонсоновские теории и их классы моделей. Кроме того, синтаксическим объектом нашего исследования является наследственность йонсоновских теорий.

Предмет исследования. Предметом исследования являются йонсоновские теории и их классы моделей.

Методика исследования. Карагандинская школа теории моделей, основанная профессором Ешкеевом А.Р., разработала новые методы изучения йонсоновских теорий, уникальной особенностью которых является использование рабочей техники центральных типов в допустимом обогащении. Суть использования метода центральных типов состоит в обогащении языка рассматриваемой теории константами и предикатами. А в случае неполных теорий классический подход теории моделей не работает, поэтому при исследовании диссертационной работы был использован семантический подход.

Научная новизна. В диссертационной работе мы рассматриваем йонсоновские теории, связанные со стабильностью. К настоящему моменту доказано, что элементарные пары полны, и далее мы рассматриваем йонсоновские пары в допустимом обогащении для неполной теории.

Теоретическая и практическая ценность работы. Научная и прикладная значимость данной диссертации представляет интерес в таких теоретических науках, как теория моделей и универсальной алгебры, а также в приложениях различных смежных классов математики и информатики. Например, задача формализации онтологий различных предметных областей искусственного интеллекта очень важна при работе с базами данных.

Положения, выносимые на защиту. К защите выносятся следующие основные результаты диссертационного исследования:

1) Получены некоторые теоретико-модельные свойства фрагментов специальных подмножеств в допустимых обогащениях при изучении совершенной наследственной йонсоновской теории;

2) Получен критерий ω -категоричности в рамках изучения модулярных выпуклых и $\forall\exists$ -полных йонсоновских теорий;

3) Получены некоторые теоретико-модельные свойства наследственных теорий при изучении наследственных йонсоновских теорий, состоящих из одной сигнатуры в допустимых обогащениях;

4) Получены свойства орбитальных типов и сильно минимальных множеств, определяющих специальную йонсоновскую геометрию и заданных оператором замыкания;

5) Получен критерий косемантичности семантических пар для йонсоновского спектра;

6) Получены результаты, связанные с J -сильно минимальными типами в семантической модели;

7) Получены некоторые теоретико-модельные свойства J - λ -стабильных и наследственных теорий;

8) Доказано обобщение стабильности для йонсоновских наследственных спектров, связывающее J - λ -стабильность и классическую стабильность;

9) Получены основные свойства семантических пар и e.f.c.p. для J - λ -стабильного совершенного йонсоновского спектра.

Достоверность и обоснованность обеспечивается конструктивностью используемых методов. Общие выводы изложены в виде теорем и приведены их доказательства.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены и обсуждены на следующих международных конференциях и семинаре:

– Logic Colloquium 2023: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) (5–9 June 2023, Milan University, Milan, Italy);

– 16th Asian Logic Conference (17-21 June 2019, Nur-Sultan, Republic of Kazakhstan);

– Мальцевские чтения: международная конференция (19-22 ноября 2018 г., Новосибирск, Россия);

– Традиционная международная апрельская конференция (3-5 апреля 2019, Институт математики и математического моделирования, Алматы, Республика Казахстан);

– Традиционная международная апрельская конференция (6-8 апреля 2022 г., Институт математики и математического моделирования Алматы, Республика Казахстан);

– Традиционная международная апрельская конференция (16-19 и 22 апреля 2024 г., Институт математики и математического моделирования Алматы, Республика Казахстан);

– Международная конференция, посвященная 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal» (16-19 октября 2019, Нур-Султан, Республика Казахстан);

– Международная научная конференция «Теоретические прикладные проблемы математики, механики и информатики» (12-13 июня 2019 г.,

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, г. Караганда, Республика Казахстан).

– Также полученные результаты были доложены и обсуждены на научном семинаре кафедры алгебры, математической логики и геометрии имени профессора Т.Г. Мустафина КарГУ им. акад. Е.А. Букетова (руководитель – д.ф.-м.н., профессор Ешкеев А.Р.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах: 1 статья – в журнале, входящем в базу данных Scopus; 3 статьи – в журналах, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан; 8 работ – в материалах международных научных конференций.

В работах, выполненных с соавторами, вклад каждого из соавторов является равным.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа объемом 65 страниц состоит из следующих структурных элементов: введение, две главы, заключение, список литературы. Нумерация определений и заключений состоит из трех индексов: первый индекс — номер раздела, второй — номер параграфа, третий — уникальный номер определения или теоремы в этом параграфе.

Диссертация состоит из двух тесно связанных между собой глав. В первом разделе рассказывается об основных результатах, фиксирующих некоторые свойства наследственных теорий в допустимом обогащении, и основные понятия, использованные при получении этих результатов. Для рассмотрения этих результатов первая глава разбита на шесть параграфов, и здесь рассмотрены такие понятия, как совершенные йонсоновские теории и спектры, йонсоновская стабильность и некоторые ее обобщения, понятие допустимого обогащения и центрального типа, сильно минимальные множества в предгеометрии и существенных типов семантической модели фиксированной йонсоновской теории, аксиоматическое задание форкинга в йонсоновских теориях.

Во втором разделе изложены основные результаты диссертационного исследования, в частности, рассмотрены свойства допустимых йонсоновских пар. Данная глава состоит из четырех параграфов. В каждом параграфе рассмотрены понятия и доказаны утверждения относительно, свойство экзистенциального конечного покрытия, семантические пары и свойств P -стабильности и J -немультиразмерности для наследственных йонсоновских теорий.

Количество использованных источников – 64.

Ключевые слова. Йонсоновская теория, семантическая модель, совершенная наследственная йонсоновская теория, совершенный наследственный йонсоновский спектр, модулярная предгеометрия, допустимое обогащение, центральный тип, категоричность, экзистенциально замкнутая модель, J -сильно минимальное множество, существенный тип, J -стабильная теория, семантическая пара, свойство экзистенциального

конечного покрытия, J -немультиразмерность.