

**ЖАҢАБЕРГЕНОВА НАЗЕРКЕ САЛМЕНҚЫЗЫ**

**ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ И БИЛИНЕЙНЫХ  
ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ**

**АННОТАЦИЯ**

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)  
по образовательной программе 8D05401-Математика**

**Актуальность темы.** Диссертация посвящена проблемам получения весовых оценок дискретных операторов типа Харди.

Известные непрерывные и дискретные неравенства Харди имеют огромное применение в математическом анализе, теории дифференциальных уравнений и в других областях математики. Впоследствии первоначальная форма этих неравенств была значительно обобщена. В связи с этим неравенство Харди само по себе стало отдельным направлением.

В настоящее время получение критериев выполнения непрерывных и дискретных неравенств для операторов типа Харди является одной из основных задач теории весовых неравенств. Очевидно, что весовые оценки квазилинейных и билинейных интегральных или дискретных операторов, включающих операторы Харди, являются своего рода характеристикой неравенств типа Харди. Кроме того, рассмотрение подобных дискретных квазилинейных неравенств для класса матричных операторов можно назвать новой волной в этом направлении. Поскольку, в общем случае, критерий ограниченности дискретного оператора с матрицей в весовом пространстве Лебега не определен, на матрицу задают различные условия и получают более широкие результаты, чем в случае без матрицы.

В математике изучение неравенств интегрального типа Харди часто проводится первым. Однако техника и методы доказательства интегральных и дискретных неравенств различны. Кроме того, дискретное неравенство имеет более широкий диапазон изучаемых параметров, чем интегральное неравенство, поскольку интегральные неравенства типа Харди выполняются только в тривиальных случаях, то есть в случае  $0 < p \leq 1$  интегральное неравенство выполняется только тогда, когда левая часть равна нулю. А дискретный аналог выполняется в случае  $0 < p \leq 1$ . В данной диссертации мы представляем результаты для случая  $0 < p \leq 1$ , которые являются новыми.

В диссертационной работе исследовано трехпараметрические дискретные билинейные и квазилинейные весовые неравенства с оператором Харди и матричным оператором.

Интегральные и дискретные неравенства типа Харди и их различные обобщенные формы изучаются во многих странах, таких как Россия, Швеция, Чехия, США, Хорватия, Италия, Норвегия и Китай.

Исследование неравенств типа Харди в Казахстане началось с работ М. Отелбаева и Р. Ойнарова и продолжено в работах А.Калыбай, А.

Темирхановой, А. Абылаевой. По теме данной диссертационной работы ранее были защищены диссертации С.Х. Шалгинбаевой, А. Темирхановой, Ж.А. Таспаганбетовой и Б. Омарбаевой.

**Цель работы.** Получение необходимых и достаточных условий выполнения дискретного весового неравенства типа Харди для квазилинейных, квазилинейных и билинейных операторов с матрицей при различных соотношениях параметров.

**Задачи исследования:**

- в терминах весовых последовательностей необходимые и достаточные условия выполнения дискретных квазилинейных весовых неравенств при некоторых соотношениях параметров и двусторонние оценки наименьших постоянных неравенств;
- в терминах весовых последовательностей и элементов матрицы необходимые и достаточные условия выполнения дискретных квазилинейных весовых неравенств с матричным оператором при возможных соотношениях параметров пространства когда матрица удовлетворяет некоторому условию, и двусторонние оценки наименьших постоянных неравенств;
- в терминах весовых последовательностей и элементов матрицы необходимые и достаточные условия выполнения дискретных билинейных весовых неравенств с матричным оператором при возможных соотношениях параметров пространства, когда матрица удовлетворяет некоторому условию, и двусторонние оценки наименьших постоянных неравенств.

**Объект исследования:** Квазилинейные и билинейные дискретные неравенства с операторами типа Харди в пространстве последовательностей Лебега.

**Методы исследования.** Для получения основных результатов используются утверждения и результаты, связанные с уже известными двувесовыми неравенствами типа Харди, а также метод разбиения на “пачки” последовательностей - “метод локализации”. Кроме того, при исследовании билинейного неравенств также используется “итерационный метод”.

**Научная новизна.** Критерии выполнения весовых неравенств типа Харди для некоторого класса дискретных квазилинейных и билинейных операторов.

**Результаты выносимые на защиту:**

- получены необходимые и достаточные условия выполнения весовых неравенств типа Харди для дискретных квазилинейных операторов в случае  $0 < q < \min \{p, r\} < \infty$ ;
- получены необходимые и достаточные условия выполнения весового неравенства типа Харди для дискретного квазилинейного оператора в случае  $0 < r < p \leq q < \infty, 0 < p \leq 1$ ;
- получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенств типа Харди с участием дискретных квазилинейных операторов с матрицей в случае  $0 < p \leq q < \infty$ ;

– в случае  $0 < r < p \leq q < \infty, p > 1$  получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Харди с участием дискретного квазилинейного оператора с матрицей;

– получены критерии выполнения неравенства типа Харди для дискретного билинейного оператора с матрицей в случае  $0 < \min\{p, s\} < \max\{p, s\} \leq q < \infty$ ;

– получены критерии выполнения неравенства типа Харди для дискретного билинейного оператора с матрицей в случае  $0 < \min\{p, s\} \leq 1 < \max\{p, s\} \leq q < \infty$ ;

– получены критерии выполнения неравенства типа Харди для дискретного билинейного оператора с матрицей в случае  $1 < \min\{p, s\} \leq q < \max\{p, s\} < \infty$ .

**Теоретическая и практическая ценность результатов.** Результаты диссертации вносят большой вклад в развитие теории функционального анализа, в том числе теории итерационных и билинейных дискретных неравенств Харди.

**Апробация результатов диссертации.** Основные результаты диссертации представлены на следующих конференциях:

1. Традиционные международные научные конференции Института математики и математического моделирования (Алматы, 2022, 2023);

2. XVII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «GYLYM JÁNE BILIM - 2022» (Астана, 2022 г.);

3. XVII международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2022» (Астана, 2022 г.);

4. Международная конференция «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (СITech-2022), посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.К.Надирова и 80-летию со дня рождения академика М.О.Отелбаева (Алматы, 2022 г.).

5. Международная математическая конференция «Функциональный анализ в междисциплинарных приложениях» (Antalya, 2023).

Индивидуальные результаты диссертации:

- трижды выступала на научном семинаре «Функциональный анализ и его приложения» (руководители семинара - академики НАН РК М. Отелбаев и Р. Ойнаров, профессора Е.Д. Нурсултанов, К.Н. Оспанов);

- неоднократно представлялись и обсуждались на научном семинаре «Весовые неравенства и их приложения» (руководители семинара - академик НАН РК Р. Ойнаров, доценты Темирханова А.М., Абылаева Б.М., Алдай М.).

**Опубликованные результаты работы.** По итогам диссертационной работы всего опубликовано 13 публикаций, в том числе 5 статей в рейтинговых журналах, индексируемых в базах данных Scopus или Web of Science (в том числе 2 статьи в научных журналах, включенных в список, рекомендованный Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования МНВО РК), а также 8 тезисов в материалах международных научных конференций.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации 106 страницы.

В первой главе приведены известные утверждения и леммы, необходимые для доказательства основных результатов, а также получены необходимые и достаточные условия выполнения весовых оценок квазилинейных дискретных операторов при следующих соотношениях параметров:

- $0 < q < \min \{p, r\} < \infty, p > 1;$
- $0 < q < \min \{p, r\} < \infty, 0 < p \leq 1;$
- $0 < r < p \leq q < \infty, 0 < p \leq 1.$

Во второй главе получены необходимые и достаточные условия выполнения весовых оценок квазилинейных дискретных операторов с матрицей, удовлетворяющей дискретному условию Ойнарова, при следующих соотношениях параметров:

- $0 < p \leq q < \infty, p > 1, 0 < r < \infty;$
- $0 < p \leq q < \infty, 0 < p \leq 1, 0 < r < \infty;$
- $0 < p \leq q < \infty, 0 < p \leq 1, 1 < r < \infty;$
- $0 < p \leq q < \infty, p > 1, 1 < r < \infty;$
- $0 < r < p \leq q < \infty, p > 1.$

В третьей главе получены критерии выполнения весовых оценок билинейного дискретного оператора с матрицей, удовлетворяющей дискретному условию Ойнарова, при следующих соотношениях параметров:

- $0 < p, s \leq 1, 0 < \min \{p, s\} < \max \{p, s\} \leq q < \infty;$
- $1 < p, s < \infty, 0 < \min \{p, s\} < \max \{p, s\} \leq q < \infty;$
- $0 < \min \{p, s\} \leq 1 < \max \{p, s\} \leq q < \infty;$
- $1 < \min \{p, s\} \leq q < \max \{p, s\} < \infty.$

В заключении сформулированы основные выводы и описана область их применения.

**Количество использованных источников – 74.**

**Ключевые слова.** Весовое пространство Лебега, дискретный оператор, матричные оператор, квазилинейный оператор, билинейный оператор, весовая оценка, неравенство типа Харди.