

ИСАЕВА АЙГУЛЬ КОЙШИБАЕВНА

**ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ
ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНО ПРОСТЫХ ЙОНСОНОВСКИХ ТЕОРИЙ**

АННОТАЦИЯ

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 6D060100 - Математика**

Актуальность темы. Исследование важнейших синтаксических и семантических свойств специальных счётных моделей, удовлетворяющих условию атомности или простоты в классе экзистенциально замкнутых моделей фиксированной индуктивной теории является одной из классических направлений в общей теории моделей, связанных с описанием малых моделей. К малым моделям относятся такие модели, как алгебраически простые, атомные, ядерные, жёсткие и минимальные. Одним из нерешенных вопросов этой части теории моделей является гипотеза Р. Воота для счетных моделей. С другой стороны в случае наличия атомных или счетных моделей счетной мощности для неполной теории имеет место быть вопрос об описании общего числа моделей этой теории. Таким образом, для неполных теорий значение указанных вопросов связанных с описанием малых моделей содержит в себе большое количество открытых вопросов, связанных с их описанием. В связи с этим актуальность данных задач не вызывает сомнений.

Цель работы. Основная цель диссертации - исследование важнейших синтаксических и семантических свойств специальных счётных моделей, удовлетворяющих условию атомности или простоты в классе экзистенциально замкнутых моделей фиксированной индуктивной теории. Причем эти модели, полученные в результате замыкания соответствующих определимых подмножеств некоторой семантической модели. В частности, найдены условия, при которых такие замыкания позволяют найти среди соответствующих малых моделей для которых понятие атомности и простоты совпадает как в случае счетных моделей полных теорий.

Задачи исследования. Хорошо известен классический результат Р. Воота связанный с описанием счетных моделей, которые и синтаксически и семантически являются в некотором смысле самыми «маленькими» моделями рассматриваемой теории. Этот результат – критерий связывает понятия атомной и простой модели, когда они счётны. Но при этом рассматриваемая теория является полной. В данной диссертации все результаты связанные с получением описаний и характеристик счетных моделей относятся классу вообще говоря неполных теорий, а именно фиксированных йонсоновских теорий. В известной работе Балдуина Дж. И Киккер Д. «Алгебраические простые модели» были определены аналоги понятий счетно-атомной и счетной-простой модели в рамках изучения класса вообще говоря неполных индуктивных теорий. В этой же работе были мы пытаемся сформулировать многие открытые вопросы связанные с вышеуказанным критерием Р. Воота. В

общем случае авторам Дж. Балдуину и Д. Киккер не удалось получить результат связывающий новые понятия атомности и простоты моделей в общем виде. Таким образом, в случае йонсоновских теорий, которые являются частным случаем индуктивных теорий вышеуказанная проблематика описания атомных и простых моделей в рамках работы Балдуина Дж. и Киккер Д. является актуальной и не решенной задачей. В диссертации основной задачей является уточнение понятий атомности и простоты счетных моделей индуктивных теорий из работы Балдуина Дж. и Киккер Д. в рамках изучения йонсоновских теорий. Для этого были определены понятия атомности и простоты счетных моделей с помощью оператора замыкания заданной предгеометрией на множестве всех подмножеств семантической модели рассматриваемой йонсоновской теории и использования известных результатов работы Дж. Балдуина и Д. Киккер в рамках уточненных понятий атомности и простоты счетных моделей из работы «Алгебраические простые модели» Дж. Балдуина и Д. Киккер. Кроме этого были рассмотрены счетные модели представляющие собой разновидности ядерных и жестких моделей в классе экзистенциально замкнутых моделей рассмотренной йонсоновской теории, причем они также получены как результат замыкания некоторых фиксированных определимых подмножеств семантической модели рассматриваемой йонсоновской теории. Таким образом мы можем заметить, что рассмотренные в диссертации задачи являются уточнением и в некоторых случаях обобщением вопросов рассмотренных в работе «Алгебраические простые модели» Дж. Балдуина и Д. Киккер и имеющих отношение к новым постановкам задач связывающих три тематики: описание счетных моделей неполных теорий, описание этих теорий относительно существования «малых» моделей и изучение свойств оператора замыкания относительно вышеуказанных моделей.

Объект исследования. В качестве синтаксического объекта таких моделей будет рассматриваться теоретическое множество фиксированной йонсоновской теории. В некоторых случаях мы имеем дело с замыканием определимых подмножеств, которые порождают искомую модель, и фрагмент таких подмножеств является йонсоновской теорией. Рассматривая специальные формульные подмножества, которые с одной стороны, задают атомность в смысле результатов Дж. Балдуина и Д. Киккер в работе «Алгебраические простые модели», но с другой стороны, во-первых, дают некоторую геометрическую интерпретацию в смысле предгеометрии заданной на булеане семантической модели, во-вторых, дают новый инструмент для изучения соответствующего вида атомности.

Предмет исследования. Исследование важнейших синтаксических и семантических свойств специальных счётных моделей, удовлетворяющих условию атомности или простоты в классе экзистенциально замкнутых моделей фиксированной индуктивной теории.

Методика исследования.

Методы исследования диссертации, включают в себя многие классические методы теории моделей, а также стремительно развивающийся теоретико-

модельный подход к изучению формульно-определимых подмножеств некоторой рассматриваемой достаточно большой модели. Методы исследования включают не только классические методы, известные ранее, но и абсолютно новые методы, появившиеся при изучении параллельных проблем из общей тематики теории моделей и универсальной алгебры.

Научная новизна.

В этой работе были даны основы для обобщения понятий счетно-простой и счетно-атомной модели в рамках следующих изменений. Во-первых, понятие элементарного вложения заменилось на изоморфное вложение и тем самым авторы работы «Алгебраические простые модели» Дж. Балдуина и Д. Киккер вместо простой модели стали работать с понятием алгебраически простой модели. Во вторых, понятие счетной атомности изменилось от понятия счетной атомности для полных теорий. Одним из основных изменений и новшеств в нашем подходе к изучению малых моделей, является тот факт, что мы начали использовать формульную определимость специальных подмножеств семантической модели рассматриваемой йонсоновской теории. Это выразилось во введении понятия йонсоновского множества и его важного частного случая, как теоретическое множество.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Полученные результаты носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях в области универсальной алгебры и теории моделей для описания счетных моделей соответствующих классов теорий и алгебр, а также при чтении спецкурсов на математических факультетах университетов.

Положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационного исследования:

1. найдены достаточные условия для получения импликаций всех видов атомных множеств, замыкание которых с помощью оператора замыкания на определимых подмножествах семантической модели рассматриваемой йонсоновской теории дают импликации соответствующих атомных моделей;
2. найден критерий алгебраически простой модели для экзистенциально простой теории, когда эта модель является ядерной;
3. найден критерий $(\forall 1, \forall 2)$ - cl - Δ -nice $a.p$ множества в рамках фрагмента совершенной экзистенциально простой теории;
4. в рамках выпуклого совершенного экзистенциально простого фрагмента получен критерий ядерной модели;
5. найдены достаточные условия существования хорошей почти-слабо $(\Sigma_1, \Sigma_1) - cl$ - атомной и $(\Sigma_1, \Sigma_1) - cl$ алгебраически простой модели йонсоновской теории и критерий их эквивалентности.

Достоверность и обоснованность проведенных исследований обеспечиваются конструктивностью использованных методов. Общие утверждения сформулированы в виде теорем и представлены их доказательства.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

– European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic «Logic Colloquium 2019» (Чехия, Прага, 11 – 16 августа 2019 г.);

– European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic «Logic Colloquium 2020» (Польша, Познань, 19 – 24 июля 2021 г.);

– European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic «Logic Colloquium 2023» (Италия, Милан, 5 – 9 июня 2023 г.);

– традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling progress in electrical contacts», посвященная 80-летию юбилею академика НАН РК Станислава Николаевича Харина (Казахстан, Алматы, 3-5 апреля 2019 г.);

– the 16th Asian Logic Conference (Казахстан, Нур-Султан, 17-21 июня 2019 г.);

– международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики», посвященная 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Рамазанова Мурата Ибраевича (Казахстан, Караганда, 12-13 июня 2019 г.);

– ежегодные Мальцевские чтения. (Россия, Новосибирск, 16 – 20 ноября 2020 г.);

– ежегодные Мальцевские чтения. (Россия, Новосибирск, 20 – 24 сентября 2021 г.);

– традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики (Казахстан, Алматы, 3-5 апреля 2022 г.);

– III международные «Таймановские чтения» посвященные 85-летию университета «Современная математика: проблемы и приложения» (Казахстан, Тараз, 25 ноября 2022 г.);

– VII Всемирный Конгресс математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023) (Казахстан, Туркестан, 20-23 сентябрь 2023 г.);

– научный семинар кафедры алгебры, математической логики и геометрии имени профессора Т.Г.Мустафина, руководитель д.ф.-м.н., профессор Ешкеев А.Р. (КарУ им. Е.А.Букетова).

Публикации.

Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 18 работах. В том числе 1 статья в базе данных Web of Science, 5 статей опубликованы в журналах, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, 12 работ в материалах международных научных конференций. В работах, выполненных с соавтором, вклад каждого из соавторов является равным.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа объемом на 80 страницах, состоит из следующих структурных элементов: введения, 3 разделов, заключения, списка использованных источников.

В первой главе изложены основные понятия и теоремы классической теории моделей, во второй главе описан результат, связанный с классической проблемой Р. Воота о счетно-простых моделях полных теорий, но в более общей формулировке понятия счетной атомности. Где главным моментом является то, что она фокусируется на синтаксических свойствах специальных подмножеств фрагмента семантической модели конкретной йонсоновской теории, в третьей части найден критерий частного случая алгебраической простоты, где в качестве понятия атомности модели получено с помощью использования некоторого формульного подмножества семантической модели рассматриваемой йонсоновской теории, и замыкание этого множества представляет собой экзистенциально замкнутую подмодель этой семантической модели.

Диссертационная работа выполнена на кафедре алгебры, математической логики и геометрии имени профессора Т.Г. Мустафина Карагандинского университета имени Е.А. Букетова.

Количество использованных источников – 54.

Ключевые слова. Йонсоновская теория, семантическая модель, простая модель, атомная модель, алгебраически простая модель, ядерная модель, экзистенциально замкнутая теория, теоретическое множество, операторы замыкания, предгеометрия.