

ЭБЕК АЖАР НАРТАЙҚЫЗЫ

«КОНУСЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОБОБЩЕННОЙ ДРОБНО-МАКСИМАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ, И ВЛОЖЕНИЯ В ПЕРЕСТАНОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА»

АННОТАЦИЯ

диссертации, представленной на соискание степени доктора философии (PhD) по образовательной программе 8D05401 – «Математика»

Актуальность исследования. Классические интегральные операторы, дробно-максимальные функции и потенциал Рисса играют важную роль в гармоническом анализе, в теории функциональных пространств, в теории потенциалов и при решении дифференциальных уравнений.

Теория максимальных операторов и интегралов потенциального типа в функциональных пространствах имеет богатую историю и ей посвящено множество работ (М.Рисс, Г.Х. Харди, Д.Литтлвуд, С.Соболев, С.М. Никольский, О.В. Бесов, В.П. Ильин, Х.Трибель, И.Стейн, Г.Вейс, Е.Накаи, П.И. Лизоркин, Д.Р. Адамс, Л.И. Хедберг, С.Самко, В.Кокилашвили, В.И. Буренков, М.Л. Гольдман, А.Гогатишвили, В.Гулиев и др.). Широко известны задачи об ограниченности классического максимального оператора, дробно-максимального оператора и потенциала Рисса в пространстве Лебега.

В диссертационной работе рассматриваются пространство обобщенных дробно-максимальных функций и пространство обобщенного потенциала Рисса, основанные на перестановочно-инвариантных пространствах. Эти два оператора определяются некоторой функцией Φ и ядром потенциалов G , соответственно.

В отличие от классических дробных максимальных функций и классического потенциала Рисса, определяемого степенными функциями, рассматриваются обобщенная дробная максимальная функция M_Φ , определяемая функцией Φ , из подходящих классов, и соответствующий ей обобщенный потенциал Рисса I_G , определяемый общим ядром G . Рассмотренные нами обобщенные дробно-максимальные функции включают в себя и более общие функции (не обязательно в виде степенных функций). Подобные обобщения обеспечивают большую гибкость при описании дифференциальных и интегральных свойств функции, позволяют получать новые содержательные результаты и доказывать теоремы в тех случаях, когда классические потенциалы и максимальные функции не работают.

С помощью таких операторов определяется пространство обобщенных дробно-максимальных функций, моделируемое на основе перестановочно-инвариантных пространств, и изучаются вопросы вложения в перестановочно-инвариантные пространства. Исследование такого вложения приводит к различным конусам, образованным монотонно невозрастающими функциями. Изучены свойства конусов, построенных из невозрастающих перестановок

обобщенных дробно-максимальных функций. С помощью таких конусов формулируются критерии вложения пространства обобщенных дробно-максимальных функций в перестановочно-инвариантные пространства. При этом важную роль играют проблемы взаимных покрытия конусов.

В последние десятилетия активно исследуются вопросы ограниченности различных классических интегральных операторов в пространствах типа Морри (В.И. Буренков, М.Л. Гольдман, А.Гогатишвили, В.Гулиев, Р.Мустафаев, И.Чен, Т.Мизухара, Е.Накай, В. Йан, В.Зикель, Д.Йанг, Е.Д. Нурсултанов, Р.Ойнаров, Н.А. Бокаев и др.).

Широко известна фундаментальная роль интегральных операторов в теоремах вложения в перестановочно-инвариантные пространства, в теории функциональных пространств и их использование в теории уравнений частных производных.

Цель работы:

- определить обобщенную дробно-максимальную функцию и пространства обобщенных дробно-максимальных функций, исследовать вопросы вложения таких пространств в перестановочно-инвариантные пространства;

- получить оценки невозрастающей перестановки обобщенной дробно-максимальной функции;

- рассмотреть различные конусы, порожденные невозрастающей перестановкой обобщенной дробно-максимальной функции, и получить условия их взаимного накрывания.

Задачи исследования. Задачей данной работы является исследование следующих вопросов: определение обобщенной дробно-максимальной функции и рассмотрение пространства обобщенных дробно-максимальных функций; получение различных оценок невозрастающей перестановки обобщенной дробно-максимальной функции; построение различных конусов, связанных с ее невозрастающей перестановкой, и получение условий взаимного накрывания таких конусов; получение условий вложения пространства обобщенных дробно-максимальных функций в перестановочно-инвариантные пространства, получение описания оптимального перестановочно-инвариантного пространства для такого вложения; получение условий ограниченности супремального оператора в весовом пространстве Лоренца.

Объект исследования – пространства обобщенных дробно-максимальных функций и конусы, порожденные ими. Вложение пространства обобщенных дробно-максимальных функций в перестановочно-инвариантные пространства.

Предмет исследования. Пространства обобщенных дробно-максимальных функций и их вложения в перестановочно-инвариантные пространства.

Методика исследования. Основными методами исследования являются: методы теории операторов в функциональных пространствах; использование невозрастающих перестановок функций; построение конусов,

образованных невозрастающими функциями, и нахождение условий их эквивалентности; построение оптимального перестановочно-инвариантного пространства для вложения пространства обобщенных дробно-максимальных функции.

Для реализации таких задач требуется получить оценки невозрастающей перестановки обобщенной дробно-максимальной функции.

Научная новизна. В данной работе получены следующие новые результаты: определена обобщенная дробно-максимальная функция, совпадающая, в частном случае с классической дробно-максимальной функцией; получены различные оценки невозрастающей перестановки обобщенной дробно-максимальной функции; построены различные конусы, связанные с невозрастающей перестановкой функции и исследованы вопросы взаимного покрытия таких конусов; рассмотрены связи между обобщенной дробно-максимальной функцией и обобщенным потенциалом Рисса; получены условия вложения пространства обобщенных дробно-максимальных функций в перестановочно-инвариантные пространства, дано описание оптимального перестановочно-инвариантного пространства для такого вложения; получены условия ограниченности супремального оператора в весовом пространстве Лоренца.

Полученные результаты развивают соответствующие результаты М.Л. Гольдмана, А.Гогатишвили, А.Сианги, Р.Керман, Б.Опик, Л.Пик, Е.Бахтыгареевой, Н.А. Бокаева, Г.Ж. Каршыгиной и др.

Теоретическая и практическая ценность работы. Научные результаты работы носят теоретический характер. На основании полученных оценок для невозрастающей перестановки обобщенной дробно-максимальной функции рассмотрены различные конусы из монотонно убывающих функции. В результате получены критерии вложения пространства обобщенных дробно-максимальных функций в перестановочно-инвариантные пространства. Проведено сравнение между обобщенной дробно-максимальной функцией и обобщенным потенциалом Рисса.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании других операторов в перестановочно-инвариантных пространствах.

Исследование интегральных свойств обобщенной дробно-максимальной функции служит базой для дальнейшего изучения свойств гладкости функции в других интегральных метриках.

Полученные научные результаты могут быть использованы в специальных курсах для студентов, магистрантов и докторантов.

Положения, выносимые на защиту. К защите выносятся следующие основные результаты диссертационного исследования:

1) определяется обобщенная дробно-максимальная функция, которая в определенном случае соответствует классической дробно-максимальной функции;

2) получены разные оценки для невозрастающей перестановки обобщенной дробно-максимальной функции;

3) построены различные конусы, связанные с невозрастающей перестановкой функций, и получены условия взаимного покрытия таких конусов;

4) получены условия вложения пространства обобщенных мелко-максимальных функций в перестановочно-инвариантные пространства, дано описание оптимального перестановочно-инвариантного пространства для такого вложения;

5) получены условия ограниченности супремального оператора в весовом пространстве Лоренца.

Достоверность и обоснованность проведенных исследований обеспечиваются предложенными доказательствами приведенных теорем и лемм, обосновываются цитируемыми публикациями.

Внутреннее единство диссертационной работы. Внутреннее единство диссертационной работы достигается целью и задачами исследования. Основные результаты, полученные в диссертации, позволили определить научную новизну теории операторов в функциональных пространствах. Условием внутреннего единства данной работы является исследование взаимосвязи различных конусов порожденных невозрастающей перестановкой обобщенных мелко-максимальных функции и вложения таких пространств функций в перестановочно-инвариантные пространства.

Апробация полученных результатов. Результаты диссертации были представлены и обсуждены на следующих семинарах и конференциях:

1. XVI Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Gylym jáne bilim – 2021», ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 12 апреля 2021 г. (Нур-Султан)

2. «Algebra, Topology and Analysis: C^* and A_∞ algebras», Summer School Gonio (Batumi, 30.08.2021-03.09.2021).

3. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2022).

4. XVII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Gylym jáne bilim – 2022», ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 12 апреля 2022 г. (Нур-Султан).

5. IX Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры», Актобе: Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, 24-28 мая 2022 г.

6. «Актуальные задачи математики, механики и информатики» Международная научная конференция, посвященная 80-летию профессора Т.Г. Мустафина (Караганда: Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, 8-9 сентября 2022 г.).

7. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME - 2022) (Denizli: Pamukkale University, 2022).

8. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Алматы Институт математики и математического моделирования, 2023).

9. XVIII Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов–2023», 14-15 апреля 2023 г. (Астана).

10. XVIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Gylym jáne bilim – 2023», ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 12 апреля 2023 г. (Астана).

11. 6th international Hybrid conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2023) (Istanbul: Yildiz Technical University, 2023).

12. Международная научно-практическая конференция «Анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» посвященная 100-летию со дня рождения Т.И. Аманова (Астана: Казахстанский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 2023).

13. VII Всемирный конгресс математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023), 20-23 сентября 2023 г. (Туркестан)

Также результаты диссертации были представлены и обсуждены на научных семинарах кафедры «Фундаментальная математика» ЕНУ им. Л.Н. Гумилева:

14. Научный семинар «Функциональный анализ и его приложения», Руководители: Академик НАН РК Р.О. Ойнаров, Е.Д. Нурсултанов, К.Н. Оспанов, 19 октября 2023 г., 02 ноября 2023 г., 16 ноября 2023 г.

Публикации по полученным результатам. По теме диссертации опубликованы 19 работ (4 статьи, 15 тезисов): из них 2 статьи – в журналах, индексируемых в базе данных Scopus («Eurasian Mathematical Journal», процентиль – 49, «Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series», процентиль – 35), 2 статьи опубликованы в журналах, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан и 15 работ – в материалах международных научных конференций.

В работах, выполненных в соавторстве, автор непосредственно участвовал на всех этапах работы, связанной с подготовкой статей, под руководством научных консультантов. Автор лично способствовал достижению основных результатов.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, двух разделов, состоящих из подразделов, заключения и списка использованных источников.

Нумерация формул состоит из трех показателей. Первый индекс указывает номер раздела, второй индекс указывает порядок подразделов раздела, третий индекс указывает порядок формул в этом подразделе. Общий объем диссертации составляет 82 страниц.

Количество использованных источников – 53.

Ключевые слова. Обобщенная дробная максимальная функция, обобщенный потенциал Рисса, пространство функций, невозрастающие перестановки, конусы, перестановочно-инвариантные пространства, теоремы вложения.