

МЫРЗАКУЛОВА ЖАЙДАРЫ РАТБАЙКЫЗЫ

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СПИНОВЫЕ СИСТЕМЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 – «Математика»

Актуальность темы исследования. Современная теория нелинейных эволюционных уравнений стала значительной областью фундаментальной науки со своими задачами, принципами и методами решения. Одной из таких проблем безусловно является обобщение методов получения точных решений нелинейных эволюционных уравнений, а также, математическое моделирование новых спиновых систем, которые являются эквивалентными аналогами некоторых классических нелинейных интегрируемых систем.

В последние десятилетия активно исследуются нелинейные явления в магнитных средах. Этот интерес, обусловлен тем, что магнитные кристаллы имеют широкое применение во многих областях, например, при использовании свойств электромагнитных колебаний и волн в электротехнике, сверхвысоких частотных технологии и нанотехнологии. Исследования таких физических процессов требуют математическое моделирование. Уравнения, описывающие явления в магнетиках связаны со спиновыми системами, которые также являются нелинейными уравнениями. Одним из первых представителей спиновых систем является уравнение ферромагнетика Гейзенберга. По этой причине во многих современных работах по нелинейной теории, спиновые системы также называют обобщенными уравнениями ферромагнетика Гейзенберга.

Исследования нелинейных спиновых систем тесно связаны с понятием эквивалентности. В нелинейной теории существуют калибровочная и геометрическая эквивалентность.

Впервые понятие калибровочной эквивалентности возникло в работе В.Е. Захарова и Л.А. Тахтаджяна. Они отметили, что нелинейное уравнение Шредингера в случае притяжения методом обратной задачи рассеяния эквивалентно непрерывной изотропной цепочке спинов Гейзенберга.

Возникновение калибровочной эквивалентности зародило еще один самостоятельно развивающийся раздел интегрируемых нелинейных уравнений. Калибровочное преобразование применимо к уравнениям, которых можно решить с помощью метода обратной задачи рассеяния. Смысл калибровочной эквивалентности заключается в том, что любую пару Лакса нелинейного интегрируемого уравнения можно привести к паре Лакса спиновой системы и в обратном порядке. Таким образом, устанавливается что каждому решению первого соответствует решение второго.

Параллельно развивался геометрический подход исследования нелинейных интегрируемых уравнений. С появлением работы Х. Хасимоты

произошло существенное развитие геометрического подхода. Хасимото обнаружил, что внутреннее уравнение, описывающее кривизну и кручение тонкой вихревой нити, сводится к нелинейному уравнению Шредингера в трехмерном евклидовом пространстве. С помощью преобразования Хасимоты М. Лакшманан и другие получили уравнение спиновой цепочки Гейзенберга. Таким образом, впервые было установлена геометрическая эквивалентность между нелинейным уравнением Шредингера и уравнением ферромагнетика Гейзенберга. Применение дифференциальной геометрии стало отдельным разделом теории нелинейных уравнений.

Таким образом, объединение дифференциально - геометрического и калибровочного методов позволяет решить ряд важных задач и достигнуть понимания во многих вопросах, некоторые из которых составляют содержание диссертации. Оказалось, что установление эквивалентной взаимосвязи помогают систематизировать и классифицировать известных нелинейных систем. Также, прийти к заключению о свойствах новой системы зная свойства ее эквивалентного аналога, более того, показать связь между их решениями. Всё вышесказанное определяют актуальность предлагаемых исследований.

Цель исследования. Целью работы является исследование связи интегрируемых спиновых систем с нелинейными эволюционными уравнениями путем установления калибровочной и геометрической эквивалентностей. Кроме того, представление трех формулировок нелинейного уравнения Шредингера относительно гибридного репера в трехмерном пространстве Минковского и нахождение их соответствующих решений

Объекты исследования – нелинейные интегрируемые спиновые системы и связанные с ними нелинейные интегрируемые уравнения.

Предмет исследования – установление эквивалентной связи между нелинейными интегрируемыми спиновыми системами и нелинейными интегрируемыми уравнениями.

Положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся следующие результаты исследования, полученные впервые в рамках диссертационной работы:

1) Получены три формулировки нелинейного уравнения типа Шредингера относительно гибридного репера в трехмерном пространстве Минковского. Получены решения нелинейного уравнения типа Шредингера для трех формулировок;

2) Выведена спиновая система, которая является обобщенным уравнением ферромагнетика Гейзенберга, связанная с интегрируемым нелинейным уравнением Хантера-Саксона;

3) Установлена связь в виде калибровочной и геометрической эквивалентности между обобщенным уравнением ферромагнетика Гейзенберга и уравнением Хантера-Саксона. Определена связь между решениями обобщенного уравнения ферромагнетика Гейзенберга и уравнения Хантера-Саксона;

4) Найдены калибровочные эквивалентные аналоги интегрируемых уравнений типа Яджимы-Ойкавы, которые являются обобщенными уравнениями ферромагнетика Гейзенберга с самосогласованными потенциалами. Приведены соответствующие представления Лакса этих систем. Обобщенные уравнения ферромагнетика Гейзенберга с самосогласованными потенциалами возникают из условия совместности матриц $U(x, t)$, $V(x, t)$ размерности 2×2 , 3×3 .

Методы исследования. В диссертационной работе применяются признанные методы теории интегрируемых нелинейных уравнений. В частности, для определения связи спиновых систем и интегрируемых нелинейных уравнений используются калибровочная и геометрическая эквивалентности. Это помогает понять характер спиновых систем и связанных с ними нелинейных эволюционных уравнений. С помощью методов дифференциальной геометрии построены пространственные кривые интегрируемых нелинейных уравнений. Более того, представлены три формулировки, связанные с нелинейным уравнением типа Шредингера в направлениях h -линий и r -линий относительно гибридного репера в трехмерном пространстве Минковского R_1^3 .

Научная новизна исследования. В данной работе получены следующие новые результаты:

1 Получены решения нелинейного уравнение типа Шредингера в направлениях h -линий и r -линий относительно гибридного репера в трехмерном пространстве Минковского.

2 Установлена геометрическая эквивалентность между обобщенным уравнением ферромагнетика Гейзенберга и уравнением Хантера-Саксона.

3 Доказана калибровочная эквивалентность обобщенного уравнения ферромагнетика Гейзенберга и уравнения Хантера-Саксона. Определена связь между их решениями.

4 Получены спиновые системы калибровочно эквивалентные аналоги уравнений типа Яджимы-Ойкавы.

Теоретическая и практическая значимость исследования.

Результаты работы носят теоретический характер и могут найти применение в теории интегрируемых нелинейных уравнений, в математической физике и в дифференциальной геометрии.

Также результаты диссертационной работы могут быть применены в учебном процессе для чтения элективных курсов бакалаврам, магистрантам и докторантам специальности «Математика».

Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами.

Диссертационная работа выполнялась в соответствии с планами научно-исследовательских работ следующих проектов грантового финансирования МНВО РК:

1. AP08856912 «Исследование геометрии интегрируемых дисперсионных бездисперсионных уравнений» на 2020-2022 гг.

2. AP14971227 «Исследование некоторых интегрируемых обобщений уравнения ферромагнетика Гейзенберга» на 2022-2024 гг.

Апробация результатов исследования. Результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на международных и республиканских конференциях:

1. VI Congress of the Turkic world mathematical society (TWMS 2017) (Astana, 2017).

2. Geometric Methods in Physics XXXVII (Bialowieza, 2018).

3. Ломоносов–2019:15-я международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов – 2019» (Нур-Султан, 2019).

4. Международная конференция «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2019) (Нур-Султан, 2019).

5. Ломоносов–2020:16-я международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов – 2020» (Нур-Султан, 2020).

6. Международная научная конференция «Уфимская математическая школа-2021» (Уфа, 2021).

Кроме того, полученные результаты докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры «Фундаментальной математики» ЕНУ им. Л.Н. Гумилева.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертации подтверждается публикациями полученных результатов в журналах, имеющих ненулевой импакт-фактор.

Публикации. По результатам диссертационной работы опубликовано

Статьи в международных рецензируемых научных журналах

Web of Science Core Collection, Scopus

1. N. E. Gurbuz, R. Myrzakulov, Zh. Myrzakulova. Three anholonomy densities for three formulations with anholonomic coordinates with hybrid frame in R_1^3 // *Optik.* – 2022. – Vol. 261, P. 169161 (WoS IF - 2.840, Scopus Q2, процентиль – 67 %, Citescore - 4.8).

2. Zh. Myrzakulova, G. Nugmanova, K. Yesmakhanova, N. Serikbayev, R. Myrzakulov. Integrable generalized Heisenberg ferromagnet equations with self-consistent potentials and related Yajima-Oikawa type equations // *Ufa Mathematical Journal.* . – 2023. – Vol. 15. No 1 P. 122-134. (Scopus Q3, процентиль – 34 %)

В изданиях, рекомендуемых КОКСНВО:

1. Мырзакулова Ж.Р., Есмаханова К.Р. Бездисперсионный предел уравнения Ма // *Вестник КазНУ им. аль-Фараби.* - №2 (102). – С. 12-21. (2019)

2. Zh. Myrzakulova, S.R. Myrzakul. Gauge equivalence between the Γ -spin system and (2+1)-dimensional two-component nonlinear Schrodinger equation // *News NAS RK.* -Vol.2, N330, 112 – 119. (2020)

3. Zh. Myrzakulov, K. Yesmakhanova, Zh. S. Zhubayeva. Equivalence of the Hunter-Saxon equation and the generalized Heisenberg ferromagnet equation // News NAS RK. -Vol.2, N336, 33 – 38. (2021)

Объём и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 3 разделов, заключения и списка использованных источников из 119 наименований, содержит 102 страницы основного компьютерного текста.

Основное содержание диссертации. Работа состоит из пяти разделов.

Во введении отражены обоснование актуальности темы диссертационной работы, цель, объект, предмет, задачи исследования, используемые методы, обоснование научной новизны работы, ее теоретической и практической значимости, научные положения, выносимые на защиту, количество имеющихся публикаций, сведения об апробации работы и степени ее разработанности.

В первом разделе вводятся определения и понятия, связанные с нелинейными интегрируемыми уравнениями и дифференциальной геометрией. Во второй главе изучается нелинейное уравнение типа Шредингера в трехмерном пространстве Минковского относительно гибридного репера. Третий раздел посвящен исследованию связи между обобщенным уравнением ферромагнетика Гейзенберга и уравнением Хантера-Саксона. В четвертом разделе найдены калибровочные эквивалентные аналоги уравнений типа Яджимы-Ойкавы.

В заключительном разделе работы приводятся и обобщаются основные результаты, полученные за период выполнения диссертации.