

# МҮСІРЕПОВА ЭЛМИРА БЕРКІНБАЙҚЫЗЫ

## РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШЕННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

### АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по  
образовательной программе 8D05410 – Математика

**Актуальность темы.** Исследования по спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов начались с классических работ Ж. Лиувилля, С. Штурма, Биркгофа, В. А. Стеклова, Ю. Д. Тамаркина и других авторов. Дальнейшее развитие спектральной теории дифференциальных операторов определило две ветви спектральной теории: спектральная теория самосопряженных операторов; спектральная теория несамосопряженных операторов.

В настоящее время спектральная теория самосопряженных дифференциальных операторов достаточно хорошо изучена, и при этом решена важнейшая проблема спектральной теории — вопрос о базисности системы собственных функций. Известно, что система собственных функций самосопряженного дифференциального оператора с дискретным спектром образует полностью ортонормированную систему, являющуюся ортонормированным базисом.

В ходе изучения спектральных свойств несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов возникла потребность в новых подходах. В связи с этим Биркгоф (G.D. Birkhoff) ввел понятие регулярных граничных условий и предложил интегральный подход Коши. Подход основан на оценке функции Грина краевых задач, причём требуется, чтобы собственные значения были однократными. Многие последующие работы были посвящены изучению задач с регулярными краевыми условиями. Позже было выявлено, что среди регулярных краевых условий для обыкновенных дифференциальных операторов четного порядка имеются, так называемые, усиленно регулярные краевые условия со специальными свойствами. В работах Г. Кесельмана, В. П. Михайлова установлено, что система собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов нечетного порядка с регулярными краевыми условиями и система собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов четного порядка с усиленно регулярными граничными условиями образуют базис Рисса.

Особенность усиленно регулярных краевых условий для обыкновенных дифференциальных операторов четного порядка состоит в том, что бесконечное число собственных значений являются простыми. Если краевые условия регулярны, но не усиленно регулярны, то оператор может иметь

бесконечно много кратных собственных значений. Изучение базисных свойств системы собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с кратными собственными значениями оказалось трудной задачей. Например, проблема базисности системы собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка с периодическими краевыми условиями до сих пор не решена. Однако В. А. Ильин предложил новый подход к изучению базисных свойств системы собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с кратными собственными значениями. Этот подход не зависит от вида краевых условий, а основан на формуле, определяющей среднее значение решения уравнения, а условия базисности формулируются в виде произведения норм корневых функций, прямой и сопряженной спектральных задач. В ходе проведенных в главе 1 исследований о базисности собственных функций было обнаружено, что эти методы дополняют друг друга. Что касается дифференциальных уравнений с инволюцией, то отметим, что такие уравнения начали изучаться в работах А. Babbage в 19 веке. Исследования по различным вопросам теории дифференциальных уравнений с инволюцией можно найти в монографиях D. Przeworska-Rolewicz, J. Wiener, A. Cabada и F.A.F. Тоjo. Несмотря на то, что изучение инволюционных дифференциальных уравнений имеет достаточно давнюю историю, спектральные задачи не рассматривались до работ Т.Ш. Калменова и А. Шалданбаева. Спектральные задачи для дифференциальных уравнений с инволюцией во второй производной исследованы в работах Ә.М. Сәрсенбі, Ә.М. Сәрсенбі и А. Теңгаевой, М.А. Садыбекова и Ә.М. Сәрсенбі, А. Көпжасаровой и Ә.М. Сәрсенбі, Л.В. Крицкова и Ә.М. Сәрсенбі, Л.В. Крицкова, М.А. Садыбекова и Ә.М. Сәрсенбі, Л.В.Крицкова и В.Л.Иоффе, Ә.Ә. Сәрсенбі, Ә.Ә. Сәрсенбі и Б.Х. Тұрметова, Ә.Ә. Сәрсенбі и Ә.М. Сәрсенбі. Кроме того, спектральные задачи для дифференциальных уравнений высших порядков, с инволюцией в младших членах, представлены в работах Ю.А. Баранецкого и Л. Колясы. Ряд работ А.Г. Баскакова и его учеников, А.П. Хромова и его учеников посвящены изучению спектральных задач для инволюционных дифференциальных уравнений первого порядка.

Результаты исследований А.Көпжасаровой и Ә.М. Сәрсенбі нашли отражение при изучении прямых и обратных задач для волнового уравнения, уравнения теплопроводности с инволюцией и их дробных аналогов.

Инволюционные дифференциальные уравнения занимают особое место среди дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений с отражением аргумента. Дифференциальные уравнения с инволюцией имеют широкий спектр приложений в различных областях науки. При изучении геометрических задач применение уравнений с инволюцией вида  $f(x) = c - x$  был реализован в работе S.F. Lacroix. В работах R. Bellman и K. L. Cooke задача И. Бернулли и Л. Эйлера изучается путем сведения его к дифференциальному уравнению с инволюцией вида  $f(x) = -x$ . Такие инволюционные преобразования используются в классической

статистической механике, теории фильтрации и др. Сведения о математических моделях, описывающих явления физиологии, экологии, популяции, можно получить из упомянутой выше монографии D. J. Wienera.

Частным случаем изучаемых в диссертации уравнений с инволюцией являются известные классические уравнения Штурма-Лиувилля, теплопроводности и волнового уравнения. Интерес мировых ученых к изучению инволюционных дифференциальных уравнений не ставит под сомнение важность и актуальность темы диссертационной работы.

**Цель работы.** Исследование базисных свойств систем собственных векторов дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией, коэффициенты которых являются комплекснозначными функциями, а также разрешимость смешанных задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения с инволюцией, коэффициенты которых являются комплекснозначными функциями.

**Объект исследования.** Дифференциальные уравнения второго порядка с инволюцией, коэффициенты которых являются комплекснозначными функциями; уравнения теплопроводности и волновое уравнение с инволюцией, коэффициенты которых являются комплекснозначными функциями.

**Методы исследования.** В диссертации используются интегральный метод Коши, метод Фурье, аналитические методы теории дифференциальных уравнений, методы абстрактной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве, спектральной теории дифференциальных операторов, методы функционального анализа.

**Научная новизна исследования.**

В диссертационной работе получены следующие основные научные результаты.

1 Для дифференциальных уравнений второго порядка с инволюцией, коэффициенты которых являются комплекснозначными функциями:

а) определено расположение собственных значений задач Дирихле, Неймана, периодической и антипериодической краевых задач на комплексной плоскости;

б) доказана теорема о равносходимости для антипериодической краевой задачи, также показана, что система собственных функций образует базис в пространстве  $L_2(-1,1)$ ;

в) доказано, что система собственных функций задач Дирихле, Неймана, периодической и антипериодической краевых задач образует базис Рисса в пространстве  $L_2(-1,1)$ .

2 Доказаны теоремы существования и единственности решений смешанных задач для волнового уравнения с инволюцией, коэффициентами которого являются комплекснозначные функции.

3 Доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи для уравнения теплопроводности с инволюцией, коэффициентами которого являются комплекснозначные функции.

Изучаются спектральные свойства дифференциальных уравнений второго порядка с инволюцией. Построены функция Грина антипериодической краевой задачи и получена равномерная оценка функции Грина. На основе оценок функции Грина были получены результаты о полноте и базисности искомой системы собственных функций. Получены условия базисности и безусловной базисности собственных функции в пространстве  $L_2(-1,1)$ . Доказаны теоремы существования и единственности решения смешанных и обратных задач для волнового уравнения и для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом соответственно.

**Апробация полученных результатов.** Результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

1. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников Науки (Алматы, 2021г., 2023г.).

2. 6-я Международная конференция по математическим наукам, 2022г., 20-24 июля, Стамбул, Турция.

Кроме того, результаты работы обсуждались на следующем семинаре:

1. Научный центр «Теоретическая и прикладная математика». Городской научный семинар, г. Шымкент, 2023г.

#### **Публикации**

Опубликовано 12 работ по материалам исследования, в том числе 1 статья в научных изданиях, рекомендованных Комитетом, 2 статьи в журналах, входящих в квартиль Q1 по информационной базе Thomson Reuters (ISI Web of Knowledge, Thomson Reuters) и 9 статей в материалы международной конференции, в том числе 3 статьи, опубликованные в материалах зарубежных конференции.

В частности в рейтинговых журналах, проиндексированном в базах данных Web of Science и Scopus:

1. Solvability of mixed problems for the wave equation with reflection of the argument // Math Meth Appl Sci. 2022; 45:11262–11271, DOI:10.1002/mma.8448

2. Mussirepova E., Sarsenbi A.M., Sarsenbi A.A. The inverse problem for the heat equation with reflection of the argument and with a complex coefficient // Boundary Value Problems (2022) 2022:99 <https://doi.org/10.1186/s13661-022-01675-1>

В журналах, входящих в перечень КОКНВО МНВО РК:

1. Sarsenbi A.A., Mussirepova E. Green's function of a boundary value problem for a second-order differential equation with involution // Қазақстан Республикасы Ұлттық инженерлік академиясының хабаршысы, Алматы 2022г., №4 (86)

В материалах международных конференций:

1. Сәрсенбі Ә.М., Мүсірепова Э. Собственные значения краевой задачи с инволюцией // VI Оразовские чтения: актуальные вопросы тюркской культуры в цифровую эпоху. Международная научно-практическая конференция. Шымкент, SWIU. 2020г., III ТОМ, ст.202-209.

2. Мүсірепова Э., Жорғабаев Ғ. Оң анықталған инволюциясы бар екінші ретті дифференциалды операторлар // IV Юнусовские чтения: Тенденции и

перспективы развития образования и науки в условиях международной интеграции. Шымкент, SWIU. 2021, ст.399-401.

3. Мүсірепова Э., Султанбек Д. Мүсірепова Э., Султанбек Д. Инволюциясы бар екінші ретті дифференциалды теңдеу үшін Дирихле шеттік есебінің меншікті мәндері // IV Юнусовские чтения: Тенденции и перспективы развития образования и науки в условиях международной интеграции. Шымкент, SWIU. 2021г., ст.399-401.

4. Sarsenbi A.M., Mussirepova E., Sarsenbi A.A. Existence and uniqueness of solution to wave equation with involution // 6 th international conference of mathematical sciences, ICMS 2022, Istanbul, Turkiye

5. Mussirepova E., Sarsenbi A.A. Green's function of a boundary value problems for a differential equation with involution // 6 th international conference of mathematical sciences, ICMS 20227., Istanbul, Turkiye

6. Mussirepova E., Sarsenbi A.M., Sarsenbi A.A. Existence and uniqueness solution of wave equations with involution // Sixth International Conference on Analysis and Applied Mathematics, Bahcesehir University, Turkey

7. Мүсірепова Э., Сарсенби А.А., Сарсенби А.М. Разрешимость смешанных задач для уравнения волнового с инволюцией // АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И ИНФОРМАТИКИ Материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора Т.Г. Мустафина

8. Мүсірепова Э., Сарсенби А.А., Сарсенби А.М. Разрешимость смешанных задач для уравнения теплопроводности с инволюцией // АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И ИНФОРМАТИКИ Материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора Т.Г. Мустафина

9. Сарсенби А.А., Мүсірепова Э. Собственные функции антипериодической задачи для дифференциального уравнения с инволюцией // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь дня науки Республики Казахстан. Тезисы докладов. Алматы, ИМиММ. 2023г., ст.106

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, двух частей (каждая часть разбита на параграфы), заключения и списка литературы, состоящего из 70 наименований. Общий объем диссертации составляет 83 страниц.

**В заключительной части** кратко описаны основные результаты, полученные в диссертации, и отмечены возможности их применения.