

МҮСІРЕПОВА ЭЛМИРА БЕРКІНБАЙҚЫЗЫ

**ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР ТОЛҚЫН ЖӘНЕ ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК
ТЕҢДЕУЛЕРІ ҮШІН АРАЛАС ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ**

**8D05410 – Математика білім беру бағдарламасы бойынша философия
докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияның**

АННОТАЦИЯСЫ

Тақырыптың өзектілігі. Жәй дифференциалдық операторлардың спектралдық теориясы бойынша зерттеулер Ж.Лиувиль, Ш.Штурм, Биркгоф, В.А.Стеклов, Я.Д.Тамаркин және де тағы басқа авторлардың классикалық жұмыстарынан бастап жүргізіле бастады. Дифференциалдық операторлардың спектралдық теориясының ары қарай дамытылуы спектралдық теорияның екі тармағын айқындады: өз-өзіне түйіндес операторлардың спектралдық теориясы; өз-өзіне түйіндес емес операторлардың спектралдық теориясы.

Қазіргі таңда өз-өзіне түйіндес дифференциалдық операторлардың спектралдық теориясы жеткілікті дәрежеде жақсы зерттелген және осы жағдайда спектралдық теорияның ең басты мәселесі – меншікті функциялар жүйесінің базистігі туралы сұрақ өз шешімін тапқан. Дискретті спектрі бар өз-өзіне түйіндес дифференциалдық оператордың меншікті функциялар жүйесі ортонормалдық базис болып табылатын толық ортонормаланған жүйе құрайтыны белгілі.

Өз өзіне түйіндес емес жәй дифференциалдық операторлардың спектралдық қасиеттерін зерттеу барысында жаңа тәсілдердің қажеттілігі туындады. Бұл орайда Биркгоф (Birkhoff G.D.) регулярлық шеттік шарттар ұғымын енгізіп, интегралдық Коши тәсілін ұсынды. Тәсіл шеттік есептердің Грин функциясын бағалауға негізделген және меншікті мәндердің еселі болмауы талап етіледі. Бұдан кейінгі көптеген зерттеулер шеттік шарттары регулярлы болатын есептерді зерттеуге арналды. Жұп ретті жәй дифференциалдық операторлар үшін регулярлы шеттік шарттар арасында ерекше қасиеттерге ие қатаң регулярлы шеттік шарттар бар болатындығы анықталып, шеттік шарттары регулярлы болатын тақ ретті жәй дифференциалдық операторлардың және шеттік шарттары қатаң регулярлы болатын жұп ретті жәй дифференциалдық операторлардың меншікті функциялар жүйесі Рисс базисі болатындығы Г.М. Кесельманың, В.П.Михайловтың еңбектерінде дәлелденді.

Жұп ретті жәй дифференциалдық операторлар үшін қатаң регулярлы шеттік шарттар шексіз көп меншікті мәндердің бір еселі болуын қамтамасыз етеді. Шеттік шарттар регулярлы, бірақ қатаң регулярлы емес болған

жағдайда оператордың шексіз көп меншікті мәндері еселі болуы мүмкін. Меншікті мәндері еселі болатын жәй дифференциалдық операторлардың меншікті функциялар жүйесінің базистік қасиеттерін зерттеу күрделі мәселе боп шықты. Мысалы, шеттік шарттары периодты болатын екінші ретті жәй дифференциалдық операторлардың меншікті функциялар жүйесінің базистігі туралы мәселе жалпы жағдайда әлі күнге шешімін таппады. Дегенмен, меншікті мәндері еселі болатын жәй дифференциалдық операторлардың меншікті функциялар жүйесінің базистік қасиеттерін зерттеу үшін В.А.Ильин жаңа тәсіл ұсынды. Бұл тәсіл шеттік шарттардың түріне байланысты емес, теңдеудің шешімінің орта мәнін анықтайтын формулаға негізделген, және базистік шарттар түйіндес шеттік есептің меншікті функцияларын қоса алғанда, меншікті функциялардың нормаларының өсу, өспеуіне байланысты айтылады. Аталған тәсілдердің бірін бірі толықтыра түсетінін біз 1-тарауда тең жинақталу және базис туралы теоремаларды дәлелдеу барысында айғақтайтын боламыз.

Инволюциясы бар дифференциалдық теңдеулерге келетін болсақ, мұндай теңдеулер 19 ғасырда А. Ваббагенің жұмыстарында зерттеле бастағаны байқалады. Инволюциясы бар дифференциалдық теңдеулер теориясының әртүрлі мәселелері туралы зерттеулерді D. Przeworska-Rolewiczтің, J. Wienerдің, A. Cabada және F.A.F. Тојоның монографияларынан табуға болады. Біршама тарихы бар инволюциялы дифференциалдық теңдеулер үшін спектралдық есептер Т.Ш. Кәлменов пен Ә. Шалданбаевтың жұмысына дейін қарастырылмаған екен. Екінші ретті туындысында инволюциясы бар дифференциалдық теңдеулер үшін спектралдық есептер Ә.М. Сәрсенбінің, Ә.М. Сәрсенбі мен А. Теңгаеваның, М.А. Садыбеков пен Ә.М. Сәрсенбінің, А. Көпжасарова мен Ә.М. Сәрсенбінің, Л.В. Крицков пен Ә.М. Сәрсенбінің, Л.В. Крицков, М.А. Садыбеков Ә.М. және Сәрсенбінің, Л.В.Крицков пен В.Л.Иоффенің, Ә.Ә. Сәрсенбінің, Ә.Ә. Сәрсенбі мен Б.Х. Тұрметовтың, Ә.Ә. Сәрсенбі мен Ә.М. Сәрсенбінің зерттеулерінде дамытылды. Сонымен қатар, инволюция кіші мүшелерінде болатын жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер үшін спектралдық есептер Ю. Баранецкий мен Л. Колясаның еңбектерінде қарастырылған. Инволюциялы бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін спектралдық есептерді зерттеуге А.Г. Баскаков және оның оқушыларының, А.П. Хромов пен оның оқушыларының, біршама еңбектері арналған.

А.Көпжасарова мен Ә.М. Сәрсенбінің зерттеулерінің нәтижелері инволюциясы бар толқын теңдеуі, жылуөткізгіштік теңдеуі және олардың бөлшек ретті аналогтары үшін тура, кері есептерді зерттеу барысында көрініс тапқан.

Инволюциясы бар дифференциалдық теңдеулер аргументі ауытқыған дифференциалдық теңдеулер мен функционалды – дифференциалдық теңдеулер арасында ерекше орын алады. Инволюциясы бар дифференциалдық теңдеулердің ғылымның әртүрлі салаларында біршама

қолдану аясы бар. Геометриялық есептерді зерттеуде $f(x) = c - x$ түріндегі инволюциясы бар теңдеулерді пайдалану S.F. Lacroix-тың жұмысында жүзеге асырылған. R. Bellman және K. L. Cooke – тың еңбектерінде И. Бернулли және Л. Эйлер есебі $f(x) = -x$ түріндегі инволюциясы бар дифференциалдық теңдеуге келтірілу арқылы зерттеледі. Түрі осындай инволюциялық түрлендірулер классикалық статистикалық механиканың салаларында, фильтрлеу теориясында қолданылады. Физиология, экология, популяция құбылыстарын сипаттайтын математикалық моделдер жайында ақпараттарды жоғарыда айтылған J. Wienerдің монографиясынан және т.б. еңбектерден алуға болады.

Диссертациялық жұмыста зерттелген инволюциялы теңдеулердің дербес жағдайы кеңінен танымал классикалық Штурм – Лиувилль, жылуөткізгіштік және толқын теңдеулері болып табылады. Әлем ғалымдарының инволюциялы дифференциалдық теңдеулерді зерттеуге қызығушылық танытуы диссертациялық жұмыстағы зерттеулердің маңыздылығы мен өзектілігіне күмән туғызбайды.

Жұмыстың мақсаты. Коэффициенттері комплекс мәнді функция болып табылатын инволюциясы бар екінші ретті дифференциалдық операторлардың меншікті векторлар жүйесінің базистік қасиеттерін, сондай ақ коэффициенттері комплекс мәнді функция болатын инволюциясы бар жылуөткізгіштік және толқын теңдеулері үшін аралас есептердің шешімділігін зерттеу.

Зерттеу объектісі. Коэффициенттері комплекс мәнді функция болып табылтын инволюциясы бар екінші ретті дифференциалдық теңдеулер; коэффициенттері комплекс мәнді функция болатын инволюциясы бар жылуөткізгіштік және толқын теңдеулері.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыста интегралдық Коши әдісі, Фурье әдісі, дифференциалдық теңдеулер теориясының аналитикалық тәсілдері, Гильберт кеңістігіндегі сызықты операторлардың абстрактілі теориясының, дифференциалдық операторлардың спектралдық теориясының, функциялық анализдің әдістері қолданылған.

Ғылыми жаңалығы. Жұмыста алынған жаңа ғылыми нәтижелер. Диссертациялық жұмыста төмендегідей негізгі ғылыми нәтижелер алынған.

1 Коэффициенттері комплекс мәнді функция болып табылатын инволюциясы бар екінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін:

а) Дирихле, Нейман, периодты және антипериодты шеттік есептердің меншікті мәндерінің комплекс жазықтықта орналасуы анықталды;

ә) антипериодты шеттік есеп үшін тең жинақталу теоремасы, меншікті функциялар жүйесінің $L_2(-1,1)$ кеңістігінде базис құрайтыны дәлелденді;

б) Дирихле, Нейман, периодты және антипериодты шеттік есептердің меншікті функциялар жүйесінің $L_2(-1,1)$ кеңістігінде Рисс базисін құрайтыны дәлелденді.

2 Коэффициенттері комплекс мәнді функция болып табылатын инволюциясы бар толқын теңдеуі үшін аралас есептердің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденді.

3 Коэффициенттері комплекс мәнді функция болып табылатын инволюциясы бар жылуөткізгіштік теңдеуі үшін кері есептердің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденді.

Антипериодты шеттік шарттармен берілген инволюциясы бар екінші ретті дифференциалдық есептердің Грин функциялары құрылып, оның бірқалыпты бағалаулары алынған. Инволюциясы бар екінші ретті дифференциалдық теңдеулердің спектралдық қасиеттері зерттелген. Грин функциясының бағалаулары негізінде меншікті функциялар жүйесінің толымдылығы мен базистігі туралы нәтижелер алынды. Меншікті функциялар жүйесінің $L_2(-1,1)$ кеңістігінде базис, шартсыз базис және Рисс базисі болатындығы көрсетілді. Коэффициенті айнымалы жылуөткізгіштік, толқын теңдеулері үшін сәйкес кері және аралас есептердің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденді.

Алынған нәтижелерді апробациялау. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері келесі конференцияларда баяндалды:

1. Қазақстан Республикасы ғылым қызметкерлері күніне орай Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы, 2021ж., 2023ж.).
2. Математика ғылымдары бойынша 6-шы халықаралық конференция, 2022ж., 20-24 шілде, Стамбул, Түркия.

Сонымен қатар, жұмыстың нәтижелері келесі семинарда талқыланды:

1. «Теориялық және қолданбалы математика» ғылыми орталығы. Жалпықалалық ғылыми семинар, Шымкент қаласы, 2023ж.

Жариялымдар

Зерттеу материалдары бойынша 12 еңбек жарияланған, соның ішінде 1 мақала Комитет ұсынатын ғылыми басылымдарда, 2 мақала Томсон Рейтер (ISI Web of Knowledge, Thomson Reuters) компаниясының ақпараттық базасының деректері бойынша Q1 квантиліне енетін журналдарда және 9 мақала халықаралық конференция материалында, оның ішінде 3 мақала шетелдік конференция материалында жарияланған.

Атап айтқанда Web of Science және Scopus мәліметтер базасында индекстелетін жоғары рейтингілі журналда:

1. Mussirepova E., Sarsenbi A.M., Sarsenbi A.A. Solvability of mixed problems for the wave equation with reflection of the argument // Math Meth Appl Sci. 2022;45:11262–11271, DOI:10.1002/mma.8448
2. Mussirepova E., Sarsenbi A.M., Sarsenbi A.A. The inverse problem for the heat equation with reflection of the argument and with a complex coefficient // Boundary Value Problems (2022) 2022:99 <https://doi.org/10.1186/s13661-022-01675-1>

ҚР БҒМ БҒССҚК тізіміне кіретін журналдарда:

1. Sarsenbi A.A., Mussirepova E. Green's function of a boundary value problem for a second-order differential equation with involution // Қазақстан

Республикасы Ұлттық инженерлік академиясының хабаршысы, Алматы 2022, №4 (86)

Халықаралық конференциялар материалдарында:

1. Сәрсенбі Ә.М., Мүсірепова Ә. Собственные значения краевой задачи с инволюцией // VI Оразов оқулары: сандық дәуірдегі Түркі мәдениетінің өзекті мәселелері. Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференция. Еңбектер жинағы. Шымкент, SWIU. 2020, III ТОМ, 202-209б.
2. Мүсірепова Ә., Жорғабаев Ғ. Оң анықталған инволюциясы бар екінші ретті дифференциалды операторлар // IV Юнусов оқулары: Халықаралық интеграция жағдайында білім және ғылымның даму тенденциялары мен перспективалары. Шымкент, SWIU. 2021, 399-401б.
3. Мүсірепова Ә., Султанбек Д. Инволюциясы бар екінші ретті дифференциалды теңдеу үшін Дирихле шеттік есебінің меншікті мәндері // IV Юнусов оқулары: Халықаралық интеграция жағдайында білім және ғылымның даму тенденциялары мен перспективалары. Шымкент, SWIU. 2021, 399-401б.
4. Sarsenbi A.M., Mussirepova E., Sarsenbi A.A. Existence and uniqueness of solution to wave equation with involution // 6 th international conference of mathematical sciences, ICMS 2022, Istanbul, Turkiye
5. Mussirepova E., Sarsenbi A.A. Green's function of a boundary value problems for a differential equation with involution // 6 th international conference of mathematical sciences, ICMS 2022, Istanbul, Turkiye
6. Mussirepova E., Sarsenbi A.M., Sarsenbi A.A. Existence and uniqueness solution of wave equations with involution // Sixth International Conference on Analysis and Applied Mathematics, Bahcesehir University, Turkey
7. Мүсірепова Ә., Сәрсенбі А.А., Сәрсенбі А.М. Разрешимость смешанных задач для уравнения волнового с инволюцией // Математика, механика және информатиканың өзекті мәселелері Профессор Т.Ғ. Мұстафиннің 80 жылдығына арналған Халықаралық ғылыми конференция
8. Мүсірепова Ә., Сәрсенбі А.А., Сәрсенбі А.М. Разрешимость смешанных задач для уравнения теплопроводности с инволюцией // Математика, механика және информатиканың өзекті мәселелері Профессор Т.Ғ. Мұстафиннің 80 жылдығына арналған Халықаралық ғылыми конференция
9. Сәрсенбі А.А., Мүсірепова Ә. Собственные функции антипериодической задачи для дифференциального уравнения с инволюцией // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь дня науки Республики Казахстан. Тезисы докладов. Алматы, ИМиММ. 2023, ст.106

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, екі бөлімнен (әр бөлім пункттерге бөлінген), қорытындыдан және 70 атаудан тұратын сілтемелер тізімінен тұрады. Диссертациялық жұмыстың жалпы көлемі- 83 бет.

Қорытынды бөлімде диссертацияда алынған негізгі нәтижелер қысқаша сипатталып, олардың қолданылу мүмкіндіктері атап өтілген.