

ОТЗЫВ

на диссертационную работу Тулеутаевой Жанар Мухатаевны на тему: «Граничные задачи для двумерного по пространственной переменной уравнения теплопроводности в конусе», представленной на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности «6D060100-Математика».

В диссертационной работе исследованы краевые задачи теплопроводности в нецилиндрической области, вырождающейся в точку в начальный момент времени, в различных функциональных пространствах. Областью определения решения задачи является перевернутый круговой конус с вершиной в начале координат.

В последние годы возобновился интерес к краевым задачам, поставленным в областях, меняющихся во времени. Отчасти это связано с тем, что ряд задач математической биологии естественным образом ставится на растущих областях (например, развивающихся организмах или пролиферирующих клетках) или областях, эволюционирующих определенным образом. Такие вопросы породили большое количество математических исследований. Примеры различных приложений дифференциальных уравнений в частных производных в эволюционирующих областях приведены в обзорной статье авторов E. Knobloch, R. Krechetnikov: Problems on Time-Varying Domains: Formulation, Dynamics, and Challenges, в журнале *Acta Applicandae Mathematicae* (рецензируемый математический журнал, издаваемый Springer), 2015. Также можно упомянуть и более классические инженерные приложения, такие как жидкости или газы в настройках каналов или труб с перегородками, которые можно перемещать, удалять или вводить по желанию. Примеров различных приложений дифференциальных уравнений в частных производных в эволюционирующих областях достаточно много. Нетрудно предположить, что и в будущем новые приложения будут связаны с дифференциальными уравнениями в областях с подвижными границами. Кроме того, уравнения в частных производных, поставленные в нецилиндрических областях, интересны и с чисто математической точки зрения.

Особого внимания заслуживают граничные задачи теплопроводности в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени. Например, при исследовании температурного поля в размыкающихся электрических контактах возникает необходимость решения краевых задач для уравнений нестационарного переноса в области с подвижными границами. При этом пятно контакта можно интерпретировать как математическую точку. Такими задачами занимается С.Н. Харин. В его последних исследованиях основной идеей при решении модельных задач теплопроводности в областях с подвижными или свободными границами является получение явных аналитических решений, которые позволяют проанализировать влияние параметров моделей на динамику описываемых процессов и тем самым получить формулы для необходимых инженерных расчетов. С математической же точки зрения особенность задач состоит именно в наличии подвижной границы и вырождении области решения в начальный момент времени в точку. На сегодняшний день хорошо изучены однородные граничные задачи теплопроводности в одномерных вырождающихся областях в лебеговых весовых пространствах. Это – работы М.Т. Дженалиева и его учеников.

Также сегодня имеется значительное количество работ, посвященных слабым решениям параболических уравнений в нецилиндрических областях. Ж.-Л. Лионс использовал для исследования таких задач метод штрафа. Де Джорджи (De Giorgi) при исследовании эволюционных задач в нецилиндрических областях модифицировал метод минимизации движений (method of minimizing movements) в качестве подходящего инструмента для доказательства существования слабых решений линейных параболических уравнений в нецилиндрических областях.

В данной диссертационной работе исследуется на однозначную разрешимость неоднородная краевая задача теплопроводности, двумерная по пространственной переменной, в весовом пространстве существенно ограниченных функций и в гильбертовых пространствах Соболева.

Основная часть работы состоит из трех разделов.

В первом и во втором разделах поставлены и исследованы краевые задачи для уравнения теплопроводности в весовом пространстве существенно ограниченных функций в случае осевой симметрии и в случае ее отсутствия. Для исследования задачи теплопроводности в конусе построены тепловые потенциалы. Решение исследуемой задачи ищется в виде суммы предварительно построенных тепловых потенциалов. После удовлетворения решения граничным условиям задача сводится к вырождающемуся уравнению Абеля. Далее строится резольвента уравнения, и доказывается теорема разрешимости интегрального уравнения. Доказательство этой теоремы занимает значительную часть второго раздела. Именно на ее утверждении основаны теоремы разрешимости поставленных краевых задач.

В третьем разделе исследуется поставленная граничная задача в гильбертовых пространствах Соболева. Предварительно исследуется разрешимость задачи в усеченном конусе. Для этой цели усеченный конус преобразуется в круговой цилиндр. Эта замена переменных сохраняет пространства входных данных и решения краевой задачи. Биективный переход к цилиндрической области позволяет применить метод Галеркина. Отсюда следует однозначная разрешимость задачи в усеченном конусе. Далее строится система вложенных усеченных конусов, объединение которых в пределе дает область решения исходной краевой задачи, то есть конус. Для каждого усеченного конуса из семейства ставится краевая задача теплопроводности, аналогичная к исходной задаче, и доказывается ее однозначная разрешимость. Затем из решений этих задач составляется последовательность, члены которой продолжены нулем на «кончик» конуса. Используя свойство слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовых пространствах, доказывается однозначная разрешимость исходной граничной задачи.

Основные результаты диссертации сформулированы в виде теорем, которые строго доказаны. Вспомогательные леммы и утверждения также достоверны и обоснованы. Все результаты являются новыми, получены соискателем самостоятельно и представляют существенный вклад в развитие теории краевых задач теплопроводности в вырождающихся областях. Все результаты опубликованы в материалах международных конференций и в журналах, входящих в базы Web of Science и Scopus.

Исходя из вышеизложенного, считаю, что диссертационная работа на тему «Граничные задачи для двумерного по пространственной переменной уравнения теплопроводности в конусе» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к PhD диссертациям по специальности «6D060100-Математика», а ее автор Тулеутаева Жанар Мухатаевна достойна присуждения степени доктора философии (PhD) по указанной специальности.

Научный консультант,
PhD, профессор Карагандинского университета
имени академика Е.А. Букетова


М.Т. Космакова

