

ОТЗЫВ

на диссертационную работу Тулеутаевой Жанар Мухатаевны на тему: «Граничные задачи для двумерного по пространственной переменной уравнения теплопроводности в конусе», представленной на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности «6D060100-Математика».

В работе исследованы граничные задачи для уравнения теплопроводности в нецилиндрической области, вырождающейся в точку в начальный момент времени, в различных функциональных пространствах. Областью определения в граничной задаче является круговой конус с вершиной в начале координат.

Обширная литература посвящена исследованию разрешимости линейных и нелинейных параболических уравнений в цилиндрических областях. В последнее время увеличивается поток исследований краевых задач в областях с движущимися во времени границами. История краевых задач для параболических уравнений в нецилиндрических областях начинается в начале 20-го века, по-видимому, с работы Gevrey, в которой установлены результаты по существованию для параболических уравнений второго порядка для достаточно малого интервала времени. За результатами типа Жевре последовали результаты И.Г. Петровского в 1934 г. и А.Н. Тихонова в 1937 г. и других авторов с начала 50-х годов до настоящего времени. На сегодняшний день есть большой объем литературы по классическим решениям параболических уравнений в нецилиндрических областях (А. Friedman, L.I. Kamynin, O.A. Ladyzhenskaja, V.A. Solonnikov, G.M. Lieberman и др.). В большинстве работ область, в которой ищется решение краевой задачи, не вырождается в точку в начальный момент времени. При исследовании таких задач нецилиндрическую область сводят к цилиндрической. Имеется ряд работ, посвященных численным методам решения подобных задач.

Особый интерес представляют краевые задачи теплопроводности в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени. Например, при исследовании теплофизических процессов в электрической дуге сильноточных отключающих устройств наблюдается эффект стягивания осевого сечения дуги в пятно контакта в катодном поле. При этом диаметр пятна контакта на несколько порядков меньше диаметра сечения столба развитой дуги, поэтому ее можно рассматривать как математическую точку [здесь можно отметить работы С.Н. Харина и его учеников]. Область, где определяется решение, изменяется во времени по закону, определяемому условиями размыкания контактов. В начальный момент времени контакты находятся в замкнутом состоянии и области решения задачи нет. С математической точки зрения особенность задачи состоит именно в наличии подвижной границы и вырождении области решения в начальный момент времени в точку. На сегодняшний день хорошо изучены однородные граничные задачи теплопроводности в одномерных вырождающихся областях в лебеговых весовых пространствах.

Также сегодня имеется значительное количество работ, посвященных слабым решениям параболических уравнений в нецилиндрических областях. Ж.-Л. Лионсом доказано существование и единственность слабых решений для большого класса уравнений и систем высших порядков. Им предложено использовать для исследования таких задач метод штрафа. Реализуя эту идею, Л.А. Медейрос доказал существование слабых решений аналога первой начально-краевой задачи в нецилиндрической области для нелинейного уравнения гиперболического типа.

В данной диссертационной работе исследуется на предмет однозначной разрешимости неоднородная краевая задача теплопроводности как в весовом пространстве существенно ограниченных функций, так и в гильбертовых соболевских пространствах.

Основная часть работы состоит из трех разделов.

В первом и во втором разделах поставлены и исследованы краевые задачи для уравнения теплопроводности в весовом пространстве существенно ограниченных функций в случаях изотропии и анизотропии теплопроводности. Для исследования задачи теплопроводности в конусе построены тепловые потенциалы. Решение исследуемой задачи ищется в виде суммы построенных потенциалов, и задача сводится к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода, а именно, к вырождающемуся уравнению Абеля, которое можно рассматривать как интегральное уравнение третьего рода. В весовом классе существенно ограниченных функций построена резольвента уравнения и произведена ее оценка. Во многих физических задачах целесообразен переход от дифференциального уравнения, определяющего искомое решение, к эквивалентному интегральному уравнению. В динамических эволюционных задачах интегральные уравнения наглядно показывают причинно-следственные связи, управляющие изучаемым физическим процессом. Сведение задачи к интегральному уравнению, как правило, позволяет применить метод последовательных приближений.

В третьем разделе предварительно исследуется разрешимость краевой задачи теплопроводности в гильбертовых пространствах Соболева в усеченном конусе. С помощью биективной замены независимых переменных усеченный конус преобразуется в круговой цилиндр. Эта замена переменных сохраняет пространства входных данных и решения краевой задачи. Биективный переход к цилиндрической области важен, так как позволяет применить метод Галеркина. Отсюда следует однозначная разрешимость задачи в усеченном конусе. Далее строится система расширяющихся усеченных конусов, в пределе которая дает область (конус) решения исходной краевой задачи. Для каждого конуса ставится краевая задача теплопроводности, аналогичная к исходной задаче и доказывается ее однозначная разрешимость. Затем из решений этих задач составляется последовательность, члены которой продолжены нулем на дополнение области определения этих решений до исходного конуса. Доказывается, что предел этой последовательности является единственным решением исследуемой краевой задачи.

Результаты получены соискателем самостоятельно, и они сформулированы в виде теорем, лемм и утверждений, и они достоверны, обоснованы и строго доказаны.

В целом, результаты работы достаточно перспективны и определяют в совокупности весомый вклад в развитие теории краевых задач теплопроводности в вырождающихся областях. Они опубликованы в журналах, входящих в базы Web of Science и Scopus, и доложены на научных семинарах и международных конференциях.

Суммируя вышеизложенное, считаю, что диссертационная работа на тему «Граничные задачи для двумерного по пространственной переменной уравнения теплопроводности в конусе» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к PhD диссертациям по специальности «6D060100-Математика», а ее автор Тулеутаева Жанар Мухатаевна достойна присуждения степени доктора философии (PhD) по указанной специальности.

Научный консультант,
доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник
института математики и математического
моделирования (Г. Алматы)



М.Т. Дженалиев