

**ТУЛЕУТАЕВА ЖАНАР МУХАТАЕВНА**

**ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПО  
ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ УРАВНЕНИЯ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КОНУСЕ**

**АННОТАЦИЯ**

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)  
по специальности 6D060100 - Математика**

**Актуальность темы.**

Краевые задачи теплопроводности в вырождающихся областях возникают при исследовании тепловых процессов в межконтактном пространстве. В современных электрических устройствах очень часто используются сверхсильные и сверхслабые токи, поэтому возникает необходимость изучения новых явлений, которые ранее не наблюдались при токах нормального, среднего диапазона. Например, экспериментально установлено, что при размыкании контактов выключателей тока на короткое время возникает жидкометаллический мостик, который существенно влияет на эрозию контактного материала. В работе Харина С.Н., представлена математическая модель, описывающая переходные явления, сопровождающие короткую вакуумную дугу на начальной стадии размыкания контактов. Это позволяет авторам описать эволюцию переходной короткой анодной доминантной дуги, которая возникает сразу после разрушения расплавленного мостика. С математической точки зрения особенности рассматриваемой задачи заключаются, во-первых, в наличии изменяющейся во времени границы области определения, изменение границы зависит от условий размыкания контактов. Во-вторых, область решения вырождается в точку в начальный момент времени, так как в начальный момент времени контакты находятся в замкнутом состоянии.

Принципиальное отличие краевых задач для параболических уравнений в эволюционирующих областях от классических задач (для цилиндрических областей) состоит в том, что методы разделения переменных и интегральных преобразований неприменимы к таким задачам, поскольку невозможно согласовать решение уравнения с движением границы области теплообмена. Применение метода тепловых потенциалов позволяет свести краевую задачу с движущейся границей к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода. Если область определения не вырождается в точку в начальный момент времени, то полученное уравнение может быть решено методом последовательных приближений, т.е. интегральное уравнение, а с ним и краевая задача, имеют единственное решение. Если область определения вырождается в точку в начальный момент времени, то интегральное уравнение типа Вольтерра становится особым (сингулярным), поскольку соответствующее однородное уравнение, а значит, и исходная

однородная краевая задача, могут иметь ненулевые решения. Более того, метод Пикара неприменим к интегральному уравнению Вольтерра.

Особенностью изучаемой в работе задачи является вырождение области решения в точку в начальный момент времени и необходимость исследования задачи для достаточно малых значений времени.

В работе исследуется двумерная краевая задача по пространственным переменным в перевернутом конусе

$$G = \{(x; y, t): x^2 + y^2 < t^2, 0 < t < T\}$$

для уравнения

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

с условием на боковой поверхности конуса

$$u(x, y, t) = u_c(x, y, t), \sqrt{x^2 + y^2} = t, 0 < t < T, \quad (2)$$

где  $u_c(x, y, t)$  — заданная функция.

При определенных физико-технических допущениях граничная задача (1)–(2) моделирует температурное поле в теле плазмы электрического разряда между размыкающимися контактами высокого напряжения, находившихся первоначально в замкнутом состоянии. Поскольку нет приборов, которые могли бы измерить указанное температурное поле в связи с кратковременностью процесса, необходимо, хотя бы качественно, оценить характер протекающих тепловых процессов с помощью методов математического моделирования.

Для исследования задачи (1)–(2), построены тепловые потенциалы. Решение исследуемой задачи представлено в виде суммы построенных потенциалов, и задача сведена к сингулярному интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода, а именно, к вырождающемуся уравнению Абеля, которое можно рассматривать как интегральное уравнение третьего рода

$$t \psi(t) - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = F(t), 0 < t < T < \infty, \quad (3)$$

где  $\lambda$  — заданная положительная величина, а  $\{F(t), t \in (0, T)\}$  — заданная функция.

Порядок вырождения в исследуемом нами уравнении (3) равен единице, ядро интегрального оператора имеет слабую особенность и определяет интегральный оператор Абеля. Мы изучаем вопросы разрешимости уравнения (3) в весовом классе существенно ограниченных функций.

**Цель работы.** Постановка краевых задач для уравнений теплопроводности в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени, и исследование вопросов их разрешимости в различных функциональных пространствах; исследование сопутствующих интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

**Задачи исследования:**

1. Дать постановку краевых задач для уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях и описать пространства решений и заданных функций;

2. Построить тепловые потенциалы для представления решения поставленной краевой задачи;

3. Свести краевую задачу к вырожденному уравнению Абеля;

4. Определить классы единственности для исследуемых краевых задач в различных функциональных пространствах.

5. Исследовать на разрешимость в соболевских гильбертовых пространствах краевую задачу теплопроводности для двумерной по пространственным переменным в вырождающейся областях.

**Объект исследования:** краевые задачи для уравнений параболического типа в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени.

**Предмет исследования:** разрешимость краевых задач для уравнений теплопроводности в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени, в лебеговых и соболевских пространствах.

**Методика исследования.**

В работе используются методы общей теории дифференциальных уравнений, функционального и комплексного анализа, метод сведения краевых задач к интегральным уравнениям, метод априорных оценок.

**Научная новизна.**

В работе предлагаются новые постановки краевых задач для уравнения теплопроводности в функциональных классах. Особенность рассматриваемых задач заключается в том, что возникает необходимость исследования вопросов разрешимости интегральных уравнений третьего рода, а именно вырождающегося уравнения Абеля. Также предложена методика исследования разрешимости задач в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени, в соболевских пространствах.

**Теоретическая и практическая ценность работы.**

Результаты диссертации имеют теоретический характер. В ней разработана методика исследования ряда краевых задач для двумерных по пространственным переменным уравнений теплопроводности, основанная на сведении исследуемых задач к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода.

Кроме того, разработан метод исследования краевых задач в вырождающихся областях, основанный на представлении исходной вырождающейся области в виде системы вложенных невырождающихся областей, объединение которых в пределе дает область определения (конус) решения исходной задачи.

**Положения, выносимые на защиту.**

На защиту выносятся:

1<sup>0</sup> Постановки краевых задач для уравнения теплопроводности в функциональных классах с описанием пространств решений и входных данных задач;

2<sup>0</sup> Построение тепловых потенциалов для представления решения задачи;

3<sup>0</sup> Сведение краевой задачи к вырожденному уравнению Абеля;

4<sup>0</sup> Доказательство разрешимости исследуемых краевых задач в различных функциональных пространствах.

#### **Достоверность и обоснованность.**

Достоверность и обоснованность проведенных исследований обеспечиваются конструктивностью разработанных и использованных методов. Вспомогательные утверждения затрагиваемых проблемных вопросов каждого раздела сформулированы в виде лемм и утверждений, и они строго доказаны, а общие – в виде теорем и их доказательства представлены в развернутом изложении.

#### **Апробация работы.**

По результатам диссертации были сделаны доклады на международных конференциях и на конференциях дальнего зарубежья:

Fourth International Conference on Analysis and Applied Mathematics, 6–9 сентября 2018, Lefkosa (Nicosia), Mersin 10, Turkey;

"Problems of modelling processes in electrical contacts" международная математическая конференция ИМММ, посвящ. Дню Науки и 80-летию юбилею акад. НАН РК С.Н.Харина, Алматы, 2019;

"Марчуковские научные чтения - 2020" международная конференция, посв. 95-летию со дня рождения акад. Г.И. Марчука, Новосибирск, 2020 и др.;

на семинаре под руководством проф. Дженалиева М.Т. (ИМиММ, Алматы);

на семинаре под руководством проф. Рамазанова М.И. (КарУ им. акад. Е.А. Букетова); и др.

#### **Публикации.**

Основные результаты диссертации опубликованы в 19 работах: 1 статья - в журнале, входящий в список Scopus, 9 статей опубликовано в журналах, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан и 9 работ - в материалах международных научных конференций.

В работах, выполненных с соавторами, вклад каждого из соавторов является равным.

#### **Структура и объем диссертации.**

Диссертационная работа объемом в 128 страниц, состоит из следующих структурных элементов: обозначения и сокращения, введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников.

#### **Количество использованных источников –90.**

**Ключевые слова.** тепловые потенциалы, уравнения типа Вольтерра второго рода, уравнения Абеля, пространства Соболева, краевая задача теплопроводности.