ТАНИН АЛИБЕК ОРЛАНУЛЫ

Параболические задачи в нецилиндрических областях со специальными граничными условиями

Аннотация диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 — Математика

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка литературы и приложения. Нумерация формул, теорем, лемм, утверждений и замечанийв разделах трехзначная, первое число означает номер раздела, второе - номер подраздела, третье -собственный номер внутри подраздела.

Ключевые слова. Краевые задачи для уравнения теплопроводности, тепловой потенциал, особые интегральные уравнения Вольтерра второго рода, преобразование Лапласа, резольвента, область вырождающаяся в точку.

Актуальность темы. Необходимость решения краевых задач для уравнений нестационарного переноса в областях с границами изменяющимися со временем, объясняется тем, что они имеют широкое практическое приложение. Задачи такого рода описывают электромагнитные, газодинамические и теплофизические процессы в газоразрядной плазме низкого и высокого давления. Математическое моделирование незаменимо для разработки плазменных установок, так как дает необходимую информацию об оптимальных размерах и значениях основополагающих параметров процессов и устройств. Также они возникают при исследовании процессов плавления электрических контактов, воздействия электрической дуги на контакты; при исследовании проблем теплового удара в областях с движущейся границей, при решении ряда задач гидромеханики. Такого рода задачи имеют большую практическую ценность для исследования термических эффектов при распространении трещин, которые приводят к разрушению материалов и механизмов; при исследованиях промерзании растворов, грунтов; при исследовании кинетического роста кристаллов. Экспериментальное исследование таких явлений, в областях вырождающихся в точку в начальный момент времени, затруднено вследствие их быстротечности и, в большинстве случаев, лишь математическая модель может служить основой для получения дополнительной информации об их динамике. Аналитические методы в данном случае, дают возможность наглядного и удобного анализа явлений, позволяют отразить влияние всех факторов, оценить их значимость и выделить главные из них. К тому же, наличие аналитических решений определенного класса краевых задач представляет интерес и для построения разностных схем приближенного вычисления решений достаточно сложных задач. Однако, сложность аналитического решения задач теплопроводности в областях с границами, изменяющимися со временем и вырождающихся в точку определяется тем, что к этому типу задач непосредственно неприменимы классические методы дифференциальных уравнений математической физики. Особенность исследования таких задач заключается в том, что, когда размер области зависит от времени и область вырождается в точку в начальной момент времени, не удается согласовать решение уравнения с движением границ области. Для нахождения аналитических решений указанных классов задач теплопроводности необходимы специальные методы или модификация известных подходов. Поэтому вопрос об исследовании краевых задач в областях с вырождением в начальный момент времени со специальными граничными условиями является не до конца теоретически изученным и, соответственно, является актуальным.

Цель исследования – Постановка и решение краевых задач для уравнений теплопроводности со специальными граничными условиями в нецилиндрических областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени; решение особых интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода; исследование вопросов их разрешимости.

Задачи исследования:

- дать постановку новых краевых задач для уравнений теплопроводности в нецилиндрических, вырождающихся областях со специальными граничными условиями и описать пространства решений и заданных функций;

- преобразование исходных задач;

- редукция краевых задач к особым интегральным уравнениям Вольтерра второго рода;

- решение особых интегральных уравнений, построение резольвенты;

- решение исходных краевых задач;

- определение классов единственности для исследуемых краевых задач;

Объект исследования: краевые задачи для уравнений параболического типа со специальными граничными условиями в нецилиндрических областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени.

Предмет исследования: разрешимость краевых задач для уравнений теплопроводности со специальными граничными условиями в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени и решение сопутствующих особых интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода.

Методика исследования. В работе используются методы общей теории дифференциальных уравнений и функционального анализа, методы интегральных преобразований Лапласа, теории специальных функций и теории функций комплексного переменного.

Научная новизна. В работе предлагаются постановки новых краевых задач в нецилиндрических областях для уравнения теплопроводности со специальными граничными условиями. Особенности рассматриваемых задач приводят к тому, что возникает необходимость исследования вопросов разрешимости особых интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода.

Теоретическая и практическая ценность работы. Результаты диссертации имеют теоретический характер. В ней разработана методика исследования ряда краевых задач для уравнений теплопроводности в нецилиндрических областях, со специальными граничными условиями, основанная на сведении исследуемых задач к особым интегральным уравнениям типа Вольтерра второго рода. Решение особых интегральных уравнений получено в замкнутом виде.

Кроме того, полученные результаты могут служить определенным вкладом в теорию интегральных уравнений с переменными пределами интегрирования с особенностями ядра. Практическая ценность работы определяется тем, что она является полезной при изучении некоторых задач со свободными границами, например при исследовании однофазной задачи Стефана.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1^0 Специальные краевые задачи для уравнения теплопроводности в весовых функциональных классах и их эквивалентные преобразования;

2^0 Эквивалентность краевых задач построенным особым интегральным уравнениям типа Вольтерра второго рода;

3^0 Построение резольвенты особых интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода;

4^0 Спектральные свойства особых интегральных операторов типа Вольтерра второго рода: найдено явное представление собственных функции;

5^0 Весовые классы единственности для исследуемых краевых задач.

Достоверность и обоснованность проведенных исследований обеспечиваются конструктивностью разработанных и использованных методов. Вспомогательные утверждения затрагиваемых проблемных вопросов каждого раздела сформулированы в виде лемм и утверждений, и они строго доказаны, а общие – в виде теорем и их доказательства представлены в подробном изложении.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в: 4 статьи и 7 тезисов. Из них 1 статья - в журнале входящим в базу Scopus (процентиль 48%). В работах, выполненных с соавторами, вклад каждого из соавторов является равным.

В **подразделе 1.1** первого раздела рассматривается следующая краевая задача теплопроводности. В области $G = \{x,t|\, 0 < x < t^{\omega},\ t > 0\}$ изучаются вопросы разрешимости граничной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u_0(t),\ \frac{d\tilde{u}\,(t)}{dt} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=t^{\omega}} = u_1(t). \tag{2}$$

где $\tilde{u}\,(t) = u\,(t^{\omega}, t)\,, \omega > 1/2$.

Введем классы решений, данных задачи определены следующим образом:

$$\left(x + t^{\frac{3}{2}-\omega}\right)^{-1} u(x,t) \in L_{\infty}(G) \ \text{ т.е. } \ u(x,t) \in L_{\infty}\left(G; \left(x + t^{\frac{3}{2}-\omega}\right)\right)$$

$$f(x,t) \in W_{\infty}^{1,0}\left(G; t^{\frac{3}{2}-\omega} \exp\left(\frac{t^{\frac{3}{2}-\omega}}{4a^2}\right)\right); \tag{3}$$

$$u_0(t) \in L_{\infty}\left(R_+; \left(t^{-\left(\frac{3}{2}-\omega\right)}\right)\right); \ \ u_1(t) \in L_{\infty}\left(R_+; \left(t^{\frac{3}{2}-\omega}\right)\right)$$

Такого рода граничная задача (1)-(2) возникает, например, при изучении задачи Стефана.

Вводя новую неизвестную функцию $v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}$, преобразуем задачу (1) –(2) к следующей задаче:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \widetilde{f}(x,t), \ \ 0 < x < t,\ t > 0 \tag{4}$$

$$v|_{x=0} = v_0(t), \ \ \left.\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1 + \omega t^{\omega-1}}{a^2} v\right)\right|_{x=t^{\omega}} = v_1(t) \tag{5}$$

где$\tilde{f}(x,t) \equiv \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$, $v_0(t) \equiv u_0(t)$, $v_1(t) \equiv \frac{u_1(t)}{a^2} + \left.\frac{f}{a^2}\right|_{x=t^{\omega}}$

Замечание 1 *Каждое решение граничной задачи* (4) - (5) *определяет единственное решение (с точностью до постоянного множителя) граничной задачи* (1) –(2).

Решение задачи (4)-(5) ищется в виде суммы потенциалов двойного и простого слоя а также объемного потенциала:

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \tilde{f}(\xi,\tau) d\xi d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \nu(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x-\tau^{\omega})^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau) d\tau, \tag{6}$$

Функция, определенная равенством (6) удовлетворяет уравнению (4) для любых функций $\nu(t)$ и $\varphi(t)$, являющихся пока неизвестными и подлежащих определению.

Удовлетворяя граничные условия получим следующее интегральное уравнение

$$\varphi(t) + \int_0^t K_\omega(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = F(t), \tag{7}$$

при этом ядро $K_\omega(t,\tau)$ представимо в виде суммы:

$$K_\omega(t,\tau) = \sum_{i=1}^{4} K_\omega^{(i)}(t,\tau),$$

где:

$$\begin{aligned}
K_\omega^{(1)} &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{t^\omega + \tau^\omega}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(t^\omega+\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\};\\
K_\omega^{(2)} &= -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{t^\omega - \tau^\omega}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(t^\omega-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\};\\
K_\omega^{(3)} &= -\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1+\omega t^{\omega-1}}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(t^\omega+\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\};\\
K_\omega^{(4)} &= \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1+\omega t^{\omega-1}}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(t^\omega-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Свободный член уравнения (7) имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
F(t) = &-\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} - \frac{t^{2\omega}}{2a^2(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}\right] \exp\left\{-\frac{t^{2\omega}}{4a^2(t-\tau)}\right\} v_0(\tau)d\tau +\\
&- \frac{1+\omega t^{\omega-1}}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{t^\omega}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{t^{2\omega}}{4a^2(t-\tau)}\right\} v_0(\tau)d\tau + 2a^2 \cdot v_1(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \times\\
&\times \int_0^t \int_0^\infty \left[\frac{t^\omega+\xi}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{(t^\omega+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} - \frac{t^\omega-\xi}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{(t^\omega-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right] \tilde{f}(\xi,\tau)d\xi d\tau -\\
&- \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{1+\omega t^{\omega-1}}{(t-\tau)^{1/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(t^\omega-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \cdot \tilde{f}(\xi,\tau)d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{9}$$

Решение интегрального уравнения (7) ищется в классе функций:

$$t^{\frac{3}{2}-\omega} \cdot \varphi(t) \in L_\infty(0,\infty), \quad \text{т.е.} \quad \varphi(t) \in L_\infty\left(0,\infty;\ t^{\frac{3}{2}-\omega}\right). \tag{10}$$

При этом, уравнение (7) целесообразнее представить в виде:

$$\varphi_1(t) + \int_0^t \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}-\omega} K_\omega(t,\tau)\varphi_1(\tau)d\tau = F_1(t). \tag{11}$$

где

$$\varphi_1(t) = t^{\frac{3}{2}-\omega} \cdot \varphi(t), \quad F_1(t) = t^{\frac{3}{2}-\omega} \cdot F(t) \tag{12}$$

Отметим, что ядро $K_\omega(t,\tau)$ обладает свойствами:

1) $K_\omega(t,\tau)$ непрерывно при $0<\tau\le t\le\infty$;

2) $\lim\limits_{t\to t_0}\int\limits_{t_0}^{t} K_\omega(t,\tau)d\tau=0,\ \ t_0\ge\varepsilon>0$;

3) $\lim\limits_{t\to 0+}\int\limits_{0}^{t} K_\omega(t,\tau)d\tau=1.$

Особенность интегрального уравнения (11) заключается именно в свойстве 3 ядра $K_\omega(t,\tau)$.

Для того чтобы решить интегральное уравнение (11) строится соответствующее характеристическое интегральное уравнение.

$$\varphi(t)+\int\limits_0^t\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}-\omega}K_h(t,\tau)\cdot\varphi(\tau)\,d\tau=g(t), \tag{13}$$

где

$$K_h(t,\tau)=\sum_{i=1}^{4}K_h^{(i)}(t,\tau),$$

$$\begin{aligned}
K_h^{(1)}(t,\tau)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(2\omega-1)^{\frac{3}{2}}\left(\tau^{2\omega-1}\cdot t^{2\omega-2}+t^{4\omega-3}\right)}{\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{(2\omega-1)\left(t^{2\omega-1}+\tau^{2\omega-1}\right)^2}{4a^2\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)}\right\};\\
K_h^{(2)}(t,\tau)&=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(2\omega-1)^{3/2}\cdot t^{2\omega-2}}{\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)^{1/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{(2\omega-1)\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)^2}{4a^2\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)}\right\};\\
K_h^{(3)}(t,\tau)&=-\frac{2}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(2\omega-1)^{3/2}\cdot t^{2\omega-2}}{\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)^{1/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{(2\omega-1)\left(t^{2\omega-1}+\tau^{2\omega-1}\right)^2}{4a^2\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)}\right\};\\
K_h^{(4)}(t,\tau)&=\frac{2}{a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(2\omega-1)^{3/2}\cdot t^{2\omega-2}}{\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)^{1/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{(2\omega-1)\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)^2}{4a^2\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)}\right\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Интегральное уравнение (13) действительно является характеристическим для уравнения (11), так как его ядро обладает свойством, аналогичным свойству 3 ядра $K_\omega(t,\tau)$.

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_0^t K_h^{(1)}(t,\tau)\,d\tau=1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_0^t\left[K_h(t,\tau)-K_\omega(t,\tau)\right]d\tau=0,\ \ 0<\tau<t<\infty. \tag{15}$$

Найдено решение характерического уравнения (13):

$$\varphi(t)=g(t)+\int\limits_0^t\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}-\omega}\cdot R_h(t,\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau+C\cdot\varphi_0\left((2\omega-1)\cdot t^{2\omega-1}\right). \tag{16}$$

Для резольвенты $R_h(t,\tau)$ справедлива следующая лемма.

Лемма 0.1

$$R_h\left(t,\tau\right) \leq C_1\left(\omega\right)\cdot\frac{t^{\omega-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\tau}}{\left(t-\tau\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot exp\left\{-\frac{t^{2\omega-1}\cdot\tau}{\left(2\omega-1\right)\cdot a^2\cdot\left(t-\tau\right)}\right\}. \qquad (17)$$

Доказана теорема

Теорема 0.1 *Для любой правой части* $g(t) \in L_\infty\left(\mathrm{R}_+; t^{\frac{3}{2}-\omega}\right)$ *интегральное уравнение* (13) *имеет общее решение* $\varphi(t) \in L_\infty\left(\mathrm{R}_+; t^{\frac{3}{2}-\omega}\right)$*:*

$$\varphi\left(t\right) = g\left(t\right) + \int\limits_0^t \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}-\omega}\cdot R_h\left(t,\tau\right)\cdot g\left(t\right)d\tau + C\cdot\varphi_{hom}\left(\left(2\omega-1\right)\cdot t^{2\omega-1}\right), \qquad (18)$$

и для резольвенты $R_h(t,\tau)$ *имеет место оценка*

$$R_h\left(t,\tau\right) \leq C_1\left(\omega\right)\cdot\frac{t^{\omega-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\tau}}{\left(t-\tau\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot exp\left\{-\frac{t^{2\omega-1}\cdot\tau}{\left(2\omega-1\right)\cdot a^2\cdot\left(t-\tau\right)}\right\}.$$

Для решения интегрального уравнения (7) используется метод регуляризации Карлемано-Векуе.

Для исходной граничной задачи (1) –(2) сформулировано в следующей теореме:

Теорема 0.2 *Для любой правой части* $f(t) \in L_\infty\left(\mathrm{R}_+;\ t^{\frac{3}{2}-\omega}\exp\left\{\frac{t^\omega}{4a^2}\right\}\right)$ *и для заданных функций* $f(x,t) \in W_\infty^{1,0}\left(G; t^{\frac{3}{2}-\omega}\exp\left\{\frac{t^{2\omega-1}}{4a^2}\right\}\right)$, $u_0(t) \in L_\infty(R_+; t^{\omega-\frac{3}{2}})$; $u_1(t) \in L_\infty(R_+;\ t^{\frac{3}{2}-\omega})$ *граничная задача* (1) – (2) *имеет общее решение* $u(x,t) \in L_\infty(G; \left(x + t^{\frac{3}{2}-\omega})^{-1}\right)$.

В подразделе 1.2. рассматривается та же самая граничная задача для уравнения теплопроводности, что и подразделе 1.1. Однако отличие в том, что граница области движется по произвольному закону $x = \gamma(t)$, тогда как в предыдущей задачи граница совершала движение по степенному закону. Исследование обеих задач проводится по одной схеме, однако случай степенного движение границы рассмотрен отдельно, так как суть метода решения в этом случае прослеживается более явно. Поэтому, следует считать, что результаты двух этих случаев методически дополняют друг друга. Это послужило нам основой для отдельного рассмотрения и отдельного изложения полученных при этом результатов.

В области $G = \{x, t|\, 0 < x < \gamma(t),\ t > 0\}$ изучены вопросы разрешимости следующей граничной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(x,t\right), \quad \{0 < x < \gamma(t),\ t > 0\} \qquad (19)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u_0(t), \quad \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\gamma(t)} = u_1(t), \qquad (20)$$

где $\tilde{u}(t) = u(\gamma(t), t),\ \ \gamma(0) = 0$ при $\gamma(t) = [t(1+\alpha_0(t))]^\omega, \quad \omega > \frac{1}{2}$

Функция $\gamma(t) : (0,\infty) \to (0,\infty)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. асимптотика функции $\gamma(t)$ при $t \to 0$ и при $t \to \infty$ имеет вид t^ω, где $\omega > \frac{1}{2}$

2. начиная с некоторого момента времени t_1^* до момента времени t_2^* функция $\gamma(t)$ произвольна, строго монотонна и взаимно-однозначна, то есть существует обратное преобразование $\gamma^{-1}(t)$.

Введем классы решений и данных задачи следующим образом:

$$(x+[\gamma(t)]^{\frac{3}{2\omega}-1})^{-1}u(x,t)\in L_\infty(G),\ \text{т.е.}\quad u(x,t)\in L_\infty(G;(x+[\gamma(t)]^{3/2\omega-1})^{-1}),$$

$$f(x,t)\in W_\infty^{1,0}\left(G;[\gamma(t)]^{3/2\omega-1}\exp\left\{[\gamma(t)]^{\frac{2\omega-1}{\omega}}/(4a^2)\right\}\right);$$
$$u_0(t)\in L_\infty\left(R_+;[\gamma(t)]^{-(3/2\omega-1)}\right);\ \ u_1(t)\in L_\infty\left(R_+;[\gamma(t)]^{3/2\omega-1}\right).\quad (21)$$

Для граничной задачи (19) –(20) доказана теорема:

Теорема 0.3 *Для любой правой части* $f(t)\in L_\infty\left(\mathrm{R}_+;\ [\gamma(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\exp\{\gamma(t)/(4a^2)\}\right)$ *и для заданных* $f(x,t)\in W_\infty^{1,0}\left(G;[\gamma(t)]^{\frac{3}{2\omega-1}}\exp\left\{\frac{[\gamma(t)]^{\frac{2\omega-1}{\omega}}}{4a^2}\right\}\right)$, $u_0(t)\in L_\infty(R_+;[\gamma(t)]^{\frac{2\omega-3}{2\omega}})$; $u_1(t)\in L_\infty(\mathrm{R}_+;\ [\gamma(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}})$ *функций, граничная задача* (19) – (20) *имеет общее решение* $u(x,t)\in L_\infty(G;\left(x+[\gamma(t)]^{3/2\omega-1})^{-1}\right)$.

Во *второй* главе работы мы рассматриваем двумерную граничную задачу по пространственным переменным в перевернутом конусе $Q=\left\{(x,y,t)|\ \sqrt{x^2+y^2}<t,\ 0<t<1\right\}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\triangle u=f(x,y,t),\tag{22}$$

$$\left.\frac{d\tilde{u}}{dt}+\frac{\partial u}{\partial\bar{n}}\right|_{\sqrt{x^2+y^2}=t}=g(x,y,t),\tag{23}$$

где $\tilde{u}(t,\alpha)=u(x,y,t)|_{\sqrt{x^2+y^2}=t}$

Предполагая выполнение условия осевой симметрии и переходя в (22)–(23) к цилиндрическим координатам, в области $G=\{(r,t)|\ 0<r<t,\ 0<t<1\}$ получим следующую граничную задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=f(r,t),\tag{24}$$

$$\left.\left(2\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right|_{r=t}=g(t),\quad u(r,t)\neq\infty\qquad r\to 0.\tag{25}$$

При этом, граничное условие (23) переходит в условие (25). Введя новую функцию:

$$w(r,t)=r\frac{\partial u}{\partial r},\quad\left(\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}w(r,t)\right),\tag{26}$$

задача (24) - (25), преобразуется в следующую задачу:

В области $Q=\{(r,t)|0<r<t,0<t<1\}$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-a^2\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+r\frac{\partial}{\partial r}f(r,t),\tag{27}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\begin{cases}\left.\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{2}{a^2}\frac{1}{r}w\right\}\right|_{r=t}=g(t)-\frac{1}{a^2}f(t,t)=g_1(t),\\ \qquad\qquad w(r,t)|_{r=0}=g_2(t).\end{cases}\tag{28}$$

Известно, что функция

$$G\left(r,\xi,t-\tau\right)=\frac{r}{2a\left(t-\tau\right)}\exp\left(-\frac{r^2+\xi^2}{4a^2\left(t-\tau\right)}\right)I_1\left(\frac{r\xi}{2a^2\left(t-\tau\right)}\right)$$

является фундаментальным решением для уравнения (27), ξ- параметр. Здесь и далее $I_1(z)$ - модифицированная функция Бесселя порядка 1.

Решение задачи (27) - (28) ищем в виде суммы тепловых потенциалов: простого, двойного слоя и объемного потенциала, то есть в виде

$$w(r,t)=\int_0^t G\left(r,\xi,t-\tau\right)\big|_{\xi=\tau}\mu(\tau)d\tau+\int_0^t \left.\frac{\partial G(r,\xi,t-\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}\nu(\tau)d\tau+W(r,t,f), \quad (29)$$

где

$$W(r,t,f)=\int_0^t d\tau\int_0^\tau G(r,\xi,t-\tau)r\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial r}d\xi \quad (30)$$

- тепловой объемный потенциал. (Он является решением неоднородного уравнения (27)).

В равенстве (29), функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ - плотности потенциалов являются пока неизвестными функциями.

Подставляя соответствующие соотношения в представление решения (29) получим, интегральное представление решения уравнения (27):

$$w(r,t)=\int_0^t\frac{r}{2a^2\left(t-\tau\right)}\exp\left(-\frac{r^2+\tau^2}{4a^2\left(t-\tau\right)}\right)I_1\left(\frac{r\tau}{2a^2\left(t-\tau\right)}\right)\mu(\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^t\frac{r^2}{8a^4(t-\tau)^2}\exp\left(-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\nu(\tau)d\tau+W(r,t,f). \quad (31)$$

Удовлетворяя граничные условия, получим следующее интегральное уравнение:

$$\mu_1(t)+\int_0^t\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)^2}\widetilde{I_{01}}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\mu_1(\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^t\frac{3}{2a^2}\frac{t}{t-\tau}\widetilde{I}_1\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\mu_1(\tau)d\tau=2a^2\mathcal{F}_1(t), \quad (32)$$

где

$$\mathcal{F}_1(t)=-\left.\frac{\partial W(r,t)}{\partial r}\right|_{r=t}-\frac{2}{a^2}\left.W(r,t)\right|_{r=t}-\left.\frac{\partial\widetilde{g}_2(r,t)}{\partial r}\right|_{r=t}-\frac{2}{a^2}\left.\widetilde{g}_2(r,t)\right|_{r=t}-\frac{1}{a^2}tf(t,t)+g(t)$$

$$\widetilde{I}_1\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)=\exp\left(-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)I_1\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right).$$

$$\widetilde{I_{01}}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)=\exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\left[I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)-I_1\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\right],$$

$$\exp\left(\frac{\tau}{4a^2}\right)\mu(\tau)=\mu_1(\tau).$$

Введем новую функцию

$$\mu_2(t)=t\mu_1(t)$$

тогда уравнение (32) перепишется в следующем виде:

$$\mu_2(t)+\int_0^t M(t,\tau)\mu_2(\tau)d\tau = 2a^2 t\mathcal{F}_1(t), \tag{33}$$

где

$$M(t,\tau)=M_1(t,\tau)+M_2(t,\tau), \tag{34}$$

здесь

$$M_1(t,\tau)=\frac{t^2}{2a^2(t-\tau)^2}\widetilde{I_{01}}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right),$$

$$M_2(t,\tau)=\frac{3}{2a^2}\frac{t^2}{\tau(t-\tau)}\widetilde{I}_1\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right),$$

Отметим следующее свойство ядра (34), из которого следует, что к интегральному уравнению (33) не применим метод последовательных приближений.

Замечание 2 $\lim_{t\to 0}\int_0^t M(t,\tau)d\tau = 1$, *при этом*

$$\int_0^t M_1(t,\tau)d\tau = 1,\ \ \forall t>0, \qquad lim_{t\to 0}\int_0^t M_2(t,\tau)d\tau = 0.$$

Будем искать решение следующего "укороченного" интегрального уравнения, которое в силу замечания 2 является характеристическим для уравнения (33)

$$\mu_2(t)+\int_0^t \frac{t^2}{2a^2(t-\tau)^2}\widetilde{I_{01}}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\mu_2(\tau)d\tau = 2a^2 t\mathcal{F}_1(t). \tag{35}$$

В интегральном уравнении (35) произведём замены независимых переменных: $t=\frac{1}{t_1}$, $\tau=\frac{1}{\tau_1}$ и вводя функции:

$$\mu_2\left(\frac{1}{t_1}\right)=\mu_2\left(t_1\right), \quad 2a^2\frac{1}{t_1}\mathcal{F}_1\left(\frac{1}{t_1}\right)=\mathcal{F}_2(t_1)$$

получим:

$$\mu_2(t_1)+\int_{t_1}^\infty \frac{1}{2a^2(\tau_1-t_1)^2}\widetilde{I_{01}}\left(\frac{1}{2a^2(\tau_1-t_1)}\right)\mu_2(\tau_1)d\tau_1 = \mathcal{F}_2(t_1), \tag{36}$$

Это уравнение с разностным ядром, применим к обеим его частям преобразование Лапласа, предварительно записав его в следующем упрощенном виде:

$$\mu_2(t_1)+\int_{t_1}^\infty M_{1-}\left(t_1-\tau_1\right)\mu_2(\tau_1)d\tau_1 = \mathcal{F}_2(t_1), \tag{37}$$

где

$$M_{1-}\left(t_1-\tau_1\right)=\frac{1}{2a^2(\tau_1-t_1)^2}\widetilde{I_{01}}\left(\frac{1}{2a^2(\tau_1-t_1)}\right). \tag{38}$$

Решение уравнения (37) запишется в следующем виде

$$\mu_2(t_1)=\mathcal{F}_2(t_1)+\frac{1}{2\pi\imath}\int_{\sigma-\imath\infty}^{\sigma+\imath\infty}\widehat{R_-^*}(-p)\mathcal{F}_2(p)dp, \quad Rep<0 \tag{39}$$

где

$$\widehat{R^*_-}(-p)=\frac{1-2\frac{\sqrt{-p}}{a}I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)K_1\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)}{2\frac{\sqrt{-p}}{a}I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)K_1\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)} \tag{40}$$

Значит решение уравнения (37) имеет вид

$$\mu_2(t_1)=\mathcal{F}_2(t_1)-\int_{t_1}^{\infty}R_-(t_1-\tau_1)\mu_2(\tau_1)d\tau_1,$$

где

$$\widehat{R^*_-}(-p)\doteqdot R_-(t_1)=\frac{2a^2}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{t_1}}\sum_{k=1}^{\infty}B_k+\frac{2a^4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_kB_k\exp\left(-\alpha_k^2a^4t_1\right)-$$
$$-\frac{2a^2}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{t_1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_1(\alpha_k)}{J_1(\alpha_k)}B_k\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\alpha_k^2a^4t_1}\right)\sin\xi d\xi \tag{41}$$

где

Лемма 0.2 *Для резольвенты $R_-(t_1)$ справедлива оценка*

$$R_-(t_1)\le C\cdot\frac{1}{\sqrt{t_1}},\quad t_1>0.$$

Решение характеристического уравнения имеет следующий вид:

$$\mu_2(t)=2a^2t\mathcal{F}_1(t)-\int\limits_0^t\widetilde{R}(t,\tau)\mathcal{F}_1(\tau)d\tau$$

где

$$\widetilde{R}(t,\tau)\le C\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}}.$$

Для решения "полного"интегрального уравнения (32)

$$\mu_2(t)+\int\limits_0^t\frac{t^2}{2a^2(t-\tau)^2}\widetilde{I_{01}}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\mu_2(\tau)d\tau=$$
$$=-\int\limits_0^t\frac{3}{2a^2}\frac{t^2}{\tau(t-\tau)}\exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)I_1\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\mu_2(\tau)d\tau+2a^2t\cdot\mathcal{F}_1(t), \tag{42}$$

применим метод регуляризации решением характеристического уравнения - метод Карлемана-Векуа.

Таким образом справедлива теорема

Теорема 0.4 *Если выполнены условия $\sqrt{t}g_1(t)\in L_\infty(0,1)$ и $g_2(t)\in L_\infty(0,1)$, то граничная задача (27)-(28) имеет единственное решение $w(r,t)\in L_\infty(G)$.*

Из Теоремы 0.4 и равенство (31) получаем основной результат.

Теорема 0.5 *Если $\sqrt{t}g(t)\in L_\infty(0,1)$, то граничная задача (24)-(25) имеет единственное решение $u(r,t)\in L_\infty(G)$.*

В заключении содержатся краткие выводы по результатам диссертационных исследований.

Диссертационная работа завершается списком использованных источников, приложением А, содержащим список опубликованных работ по теме диссертации.