ТАНИН ӘЛІБЕК ОРЛАУЛЫ

Цилиндрлық емес облыстарда арнайы шектік шарттары берілген параболалық шекаралық есептер

Философия докторы (PhD) дәрежесін ізденуші диссертациясының аннотациясы
6D060100 - Математика

Диссертация құрылымы. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, екі бөлімнен, қорытындыдан, әдебиеттер тізімінен және қосымшадан тұрады. Формулалардың, теоремалардың, леммалар мен ескертулердің нөмірленуі үш таңбалы, бірінші сан бөлім нөмірін, екінші - бөлімше нөмірін, үшіншісі –бөлімше ішіндегі меншікті нөмірді білдіреді.

Түйінді сөздер. Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін шеттік есептер, жылу потенциалы, екінші текті Вольтердің ерекше интегралдық теңдеулері, Лаплас түрлендіруі, резольвента, нүктеге айналатын облыс.

Тақырыптың өзектілігі. Уақыт өте келе өзгеретін шекаралары бар облыстардағы стационарлық емес тасымалдау теңдеулері үшін шеттік есептерді шешу қажеттілігі олардың практикада кең қолданылуымен түсіндіріледі. Мұндай есептер төмен және жоғары қысымды газразрядты плазмадағы электромагниттік, газодинамикалық және термофизикалық процестерді сипаттайды. Математикалық модельдеу плазмалық қондырғыларды жасау үшін қажет, өйткені ол процестер мен құрылғыларының тиімді өлшемдері және негізгі параметрлерінің мәндері туралы қажетті ақпарат береді. Олар сонымен қатар электр контактілерінің балқу процестерін, электр доғасының контактілеріне әсерін зерттеуде; шекарасы қозғалмалы облыстардағы жылу тасымалдау мәселелерін зерттеуде, гидромеханиканың бірқатар есептерін шешуде көрініс табады. Мұндай есептер жылу әсерінен жарылудың (трещина) таралуын зерттеуде, ерітінділер мен топырақтың қатуын, кристалдардың кинетикалық өсуін зерттеу кезінде үлкен практикалық құндылыққа ие.

Уақыттың бастапқы сәтінде нүктеге айналатын облыстардағы құбылыстардың эксперименттальдық зерттеуінің қиындығы олардың өте жылдам өтуіне байланысты және көп жағдайда олардың динамикасы туралы қосымша ақпаратты тек математикалық модельдің негізінде алуға болады. Бұл жағдайда аналитикалық әдістер құбылыстарды көрнекі және ыңғайлы талдауға, барлық факторлардың әсерін көрсетуге және олардың маңыздылығын бағалап, негізгілерін ажыратуға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, белгілі бір шеттік есептер класының аналитикалық шешімдерінің болуы, күрделі есептер шешімдерін жуықтап есептеудің айырымдық сызбасын құруға негіз бола алады.

Алайда, уақыт өте келе шекарасы өзгеріп, нүктеге айналатын облыстардағы жылу өткізгіштік есептерін аналитикалық шешудің қиындығы сол: осы түрдегі есептерге математикалық физиканың дифференциалдық теңдеулерінің классикалық әдістерін бірден қолдануға келмейді. Мұндай мәселелерді зерттеудің ерекшелігі-облыстың аумағы уақытқа байланысты өзгерген кезде және уақыттың бастапқы сәтінде облыс нүктеге айналатын жағдайда, теңдеудің шешімін облыстың шекарасының қозғалысымен үйлестіру мүмкін емес. Жылу өткізгіштік есептерінің осындай кластарының аналитикалық шешімдерін табу үшін арнайы әдістер немесе белгілі әдістердің модификациясы қажет.

Сондықтан, бастапқы уақыт мезетінде нүктеге айналатын облыстардағы арнайы шекаралық шарттары бар шеттік есептерін зерттеу туралы мәселе өзекті болып табылады.

Зерттеудің негізгі мақсаты - арнайы шекаралық шарттары бар, бастапқы уақытта жойылатын цилиндрлік емес облыстардағы жылу өткізгіштік теңдеулерінің шеттік есептерінің шешімін табу; екінші ретті Вольтерра типіндегі ерекше интегралды теңдеулерді шешу; олардың шешілу мәселелерін зерттеу.

Зерттеу міндеттері:

- арнайы шекаралық шарттары бар, бастапқы уақытта жойылатын цилиндрлік емес облыстардағы жылу өткізгіштік теңдеулерінің жаңа шеттік есептерінің қойылымдарын қарастыру және берілген функциялар мен олардың шешімдерінің кеңістігін сипаттау;
- бастапқы есептерді түрлендіру;
- екінші ретті Вольтерраның ерекше интегралдық теңдеулеріне шектік есептерді келтіру (редукциялау);
- ерекше интегралдық теңдеулерді шешу, резольвентасын құру;
- бастапқы шеттік есептерді шешу;
- қарастырылатын шеттік есептер үшін жалғыздық класын анықтау;

Зерттеу нысаны: арнайы шекаралық шарттары бар, бастапқы уақытта нүктеге айналатын цилиндрлік емес облыстардағы параболалық теңдеулердің шеттік есептері

Зерттеу тақырыбы: - арнайы шекаралық шарттары бар, бастапқы уақытта жойылатын цилиндрлік емес облыстардағы жылу өткізгіштік теңдеулердің шеттік есептерінің шешімі және сәйкес екінші ретті Вольтерра типіндегі ерекше интегралды

Зерттеу әдістемесі. Жұмыста дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясы және функционалдық талдау әдістері, Лаплас интегралдық түрлендіру әдістері, арнайы функциялар теориясы және комплекс айнымалы функциялар теориясы қолданылады.

Ғылыми жаңалығы. Жұмыста арнайы шекаралық шарттары бар, бастапқы уақытта жойылатын цилиндрлік емес облыстардағы жылу өткізгіштік теңдеулердің жаңа шеттік есептерінің қойылымдары қарастырылған. Қарастырылып отырған есептердің ерекшеліктері, екінші ретті Вольтерра типті арнайы интегралдық теңдеулерді жойылу нүктесінде өсетін функциялар кластарында шешілу мәселелерін зерттеу қажеттілігіне әкеледі.

Жұмыстың теориялық және практикалық маңызы. Диссертация нәтижелері теориялық сипатқа ие. Арнайы шекаралық шарттары бар, бастапқы уақытта жойылатын цилиндрлік емес облыстардағы жылу өткізгіштік теңдеулерінің шеттік есептерін екінші ретті Вольтерра типіндегі ерекше интегралдық теңдеулерге келтіріп, зерттеу әдістемесі жасалды. Ерекше интегралды теңдеулердің шешімі тұйық түрде алынады.

Сонымен қатар, алынған нәтижелер ерекше ядролы интегралдау шегі айнымалы болып келген интегралдық теңдеулер теориясының дамуына өзіндік бір үлесін қоса алады. Жұмыстың практикалық құндылығы оның еркін шекаралары бар кейбір есептерді зерттеуде пайдаланылады, мысалы, Стефанның бір фазалы есебін зерттеу кезінде.

Қорғауға шығарылатын тұжырымдар. Қорғауға шығарылады:

1^0 Салмақты функционалдық кластардағы жылуөткізгіштік теңдеулер үшін шеттік есептер және олардың эквивалентті түрлендірулері;

2^0 Екінші ретті Вольтерра типіндегі арнайы интегралды теңдеулерімен құрастырылған шеттік есептердің эквиваленттілігі;

3^0 Екінші ретті Вольтерра типті ерекше интегралдық теңдеулердің резольвенталарын құру;

4^0 Екінші ретті Вольтерра типіндегі арнайы интегралды операторлардың спектрлік қасиеттері: меншікті функцияның айқын түрі табылды.

5^0 Қарастырылып отырған шектік есептер үшін шешімінің жалғыздығының салмақты кластары.

Жүргізілген зерттеулердің **сенімділігі** құрылған және қолданылғанған әдістердің конструктивтілігімен негізделеді. Әр бөлімнің қарастырған есептеріне қатысты қосалқы тұжырымдар лемма түрінде келтірілген және олар қатаң дәлелденген, ал жалпы тұжырымдар теорема түрінде беріліп, олардың толық дәлелдемелері ұсынылған.

Диссертацияның **1.1 бөлімінде** $G = \{x,t|\, 0 < x < t^{\omega},\ t > 0\}$ облысында жылуөткізгіштік теңдеуінің келесі шекаралық есептің шешімін қарастырамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u_0(t),\ \frac{d\tilde{u}\,(t)}{dt} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=t^{\omega}} = u_1(t), \tag{2}$$

мұнда $\tilde{u}\,(t) = u\,(t^{\omega}, t)\,, \omega > 1/2$.

Берілген есептің шешімінің классын келесі түрде анықталған:

$$\begin{gathered}\left(x + t^{\frac{3}{2}-\omega}\right)^{-1} u(x,t) \in L_{\infty}(G) \text{ т.е. } u(x,t) \in L_{\infty}\left(G; \left(x + t^{\frac{3}{2}-\omega}\right)\right)\\ f(x,t) \in W_{\infty}^{1,0}\left(G; t^{\frac{3}{2}-\omega}\exp\left(\frac{t^{\frac{3}{2}-\omega}}{4a^2}\right)\right);\\ u_0(t) \in L_{\infty}\left(R_+; \left(t^{-\left(\frac{3}{2}-\omega\right)}\right)\right);\ u_1(t) \in L_{\infty}\left(R_+; \left(t^{\frac{3}{2}-\omega}\right)\right)\end{gathered} \tag{3}$$

(1)-(2) түрдегі шекаралық есептер, Стефан есебін қарастыру барысында туындайды Жаңа $v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}$ функциясын енгізу арқылы, (1) –(2) есебі келесі есепке келтіріледі:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \widetilde{f}(x,t),\ \ 0 < x < t,\ t > 0 \tag{4}$$

$$v|_{x=0} = v_0(t),\quad \left.\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1+\omega t^{\omega-1}}{a^2}v\right)\right|_{x=t^{\omega}} = v_1(t) \tag{5}$$

где$\tilde{f}(x,t) \equiv \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$, $v_0(t) \equiv u_0(t)$, $v_1(t) \equiv \frac{u_1(t)}{a^2} + \left.\frac{f}{a^2}\right|_{x=t^{\omega}}$

Ескерту 1 (4) - (5) *шеттік есептің шешімі* (1) –(2) *шеттік есептің жалғыз шешімін ғана (тұрақты көбейткішке дейінгі дәлдікпен) анықтайды.*

(4)-(5) есептерінің шешімі жай және қос қабаттың потенциалдар мен көлемді потенциалдың қосындысы түрінде ізделінеді:

$$\begin{aligned}v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^{\infty}\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\tilde{f}(\xi,\tau)d\xi d\tau +\\ + \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\nu(\tau)d\tau +\\ + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau^{\omega})^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau,\end{aligned} \tag{6}$$

мұнда, әзірше белгісіз және анықтауды қажет ететін кез келген $\nu(t)$ мен $\varphi(t)$ функцииялары үшін (6) теңдігімен анықталған функция (4) теңдеуін қанағаттандырады.

Шекаралық шарттарды қанағаттандыра отырып келесі интегралдық теңдеуді аламыз:

$$\varphi(t) + \int_0^t K_{\omega}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = F(t), \tag{7}$$

бұл жерде $K_\omega(t,\tau)$ ядросын келесі қосындылар түрде жазуға болады:

$$K_\omega(t,\tau)=\sum_{i=1}^{4}K_\omega^{(i)}(t,\tau),$$

мұндағы:

$$\begin{aligned}
K_\omega^{(1)}&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{t^\omega+\tau^\omega}{(t-\tau)^{3/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{(t^\omega+\tau^\omega)^2}{4a^2\,(t-\tau)}\right\};\\
K_\omega^{(2)}&=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{t^\omega-\tau^\omega}{(t-\tau)^{3/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{(t^\omega-\tau^\omega)^2}{4a^2\,(t-\tau)}\right\};\\
K_\omega^{(3)}&=-\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1+\omega t^{\omega-1}}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(t^\omega+\tau^\omega)^2}{4a^2\,(t-\tau)}\right\};\\
K_\omega^{(4)}&=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1+\omega t^{\omega-1}}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(t^\omega-\tau^\omega)^2}{4a^2\,(t-\tau)}\right\}.
\end{aligned}\tag{8}$$

(7) теңдеуінің бос мүшесі келесі түрде болады:

$$\begin{aligned}
F(t)=&-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\left[\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}-\frac{t^{2\omega}}{2a^2(t-\tau)^{5/2}}\right]\exp\left\{-\frac{t^{2\omega}}{4a^2(t-\tau)}\right\}v_0(\tau)d\tau+\\
&-\frac{1+\omega t^{\omega-1}}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{t^\omega}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t^{2\omega}}{4a^2(t-\tau)}\right\}v_0(\tau)d\tau+2a^2\cdot v_1(t)-\\
&-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\left[\frac{t^\omega+\xi}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(t^\omega+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}-\frac{t^\omega-\xi}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(t^\omega-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right]\tilde f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\\
&-\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\frac{1+\omega t^{\omega-1}}{(t-\tau)^{1/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{(t^\omega-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\cdot\tilde f(\xi,\tau)d\xi d\tau.
\end{aligned}\tag{9}$$

(7) интегралдық теңдеуінің шешімін, келесі функциялар классында іздейміз:

$$t^{\frac{3}{2}-\omega}\cdot\varphi(t)\in L_\infty\left(0,\infty\right),\ \ \text{т.е.}\ \ \varphi(t)\in L_\infty\left(0,\infty;\ t^{\frac{3}{2}-\omega}\right).\tag{10}$$

Сонда, (7) теңдеуін келесі түрде жазу тиімді болады:

$$\varphi_1(t)+\int_0^t\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}-\omega}K_\omega(t,\tau)\varphi_1(\tau)d\tau=F_1(t).\tag{11}$$

мұнда

$$\varphi_1(t)=t^{\frac{3}{2}-\omega}\cdot\varphi(t),\quad F_1(t)=t^{\frac{3}{2}-\omega}\cdot F(t)\tag{12}$$

$K_\omega(t,\tau)$ ядросы келесі қасиеттерге ие:

1) $K_\omega(t,\tau)$ непрерывно при $0<\tau\le t\le\infty$;

2) $\lim\limits_{t\to t_0}\int\limits_{t_0}^{t}K_\omega(t,\tau)d\tau=0,\ \ t_0\ge\varepsilon>0$;

3) $\lim\limits_{t\to 0+}\int\limits_0^t K_\omega(t,\tau)d\tau=1$.

(11) интегралдық теңдеуінің ерекшелігі $K_\omega(t,\tau)$ ядросының 3 қасиетінде.

(11) интегралдық теңдеуді шешу үшін, сәйкес сипаттамалық интегралдық теңдеуін құрастырылады.

$$\varphi\left(t\right)+\int\limits_0^t\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}-\omega}K_h\left(t,\tau\right)\cdot\varphi\left(\tau\right)d\tau=g(t), \tag{13}$$

мұнда

$$K_h\left(t,\tau\right)=\sum_{i=1}^{4}K_h^{(i)}\left(t,\tau\right),$$

$$K_h^{(1)}\left(t,\tau\right)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\left(2\omega-1\right)^{\frac{3}{2}}\left(\tau^{2\omega-1}\cdot t^{2\omega-2}+t^{4\omega-3}\right)}{\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{\left(2\omega-1\right)\left(t^{2\omega-1}+\tau^{2\omega-1}\right)^2}{4a^2\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)}\right\};$$

$$K_h^{(2)}\left(t,\tau\right)=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\left(2\omega-1\right)^{3/2}\cdot t^{2\omega-2}}{\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)^{1/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{\left(2\omega-1\right)\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)^2}{4a^2\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)}\right\};$$

$$K_h^{(3)}\left(t,\tau\right)=-\frac{2}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\left(2\omega-1\right)^{3/2}\cdot t^{2\omega-2}}{\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)^{1/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{\left(2\omega-1\right)\left(t^{2\omega-1}+\tau^{2\omega-1}\right)^2}{4a^2\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)}\right\};$$

$$K_h^{(4)}\left(t,\tau\right)=\frac{2}{a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\left(2\omega-1\right)^{3/2}\cdot t^{2\omega-2}}{\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)^{1/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{\left(2\omega-1\right)\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)^2}{4a^2\left(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}\right)}\right\}. \tag{14}$$

(13) интегралдық теңдеуі (11) теңдеуі үшін сипаттамалық теңдеу болып табылады, себебі оның ядросы $K_\omega\left(t,\tau\right)$ ядросының 3 қасиетіне ұқсас қасиетке ие, яғни:

$$\lim_{t\to0}\int\limits_0^t K_h^{(1)}\left(t,\tau\right)d\tau=1.$$

Бұдан

$$\lim_{t\to0}\int\limits_0^t\left[K_h\left(t,\tau\right)-K_\omega\left(t,\tau\right)\right]d\tau=0,\quad 0<\tau<t<\infty, \tag{15}$$

шығады.

Лемма 1

$$R_h\left(t,\tau\right)\leq C_1\left(\omega\right)\cdot\frac{t^{\omega-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\tau}}{\left(t-\tau\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot exp\left\{-\frac{t^{2\omega-1}\cdot\tau}{\left(2\omega-1\right)\cdot a^2\cdot\left(t-\tau\right)}\right\}. \tag{16}$$

Келесі теорема дәлелденді.

Теорема 1 (13) *интегралдық теңдеуінің кез келген* $g(t)\in L_\infty\left(\mathrm{R}_+;t^{\frac{3}{2}-\omega}\right)$ *оң жағы үшін шешімі бар* $\varphi(t)\in L_\infty\left(\mathrm{R}_+;t^{\frac{3}{2}-\omega}\right)$*:*

$$\varphi\left(t\right)=g\left(t\right)+\int\limits_0^t\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}-\omega}\cdot R_h\left(t,\tau\right)\cdot g\left(t\right)d\tau+C\cdot\varphi_{hom}\left(\left(2\omega-1\right)\cdot t^{2\omega-1}\right), \tag{17}$$

ал $R_h(t,\tau)$ *резольвента үшін келесі бағалауы орынды, яғни:*

$$R_h\left(t,\tau\right)\leq C_1\left(\omega\right)\cdot\frac{t^{\omega-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\tau}}{\left(t-\tau\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot exp\left\{-\frac{t^{2\omega-1}\cdot\tau}{\left(2\omega-1\right)\cdot a^2\cdot\left(t-\tau\right)}\right\}.$$

(7) интегралдық теңдеуін шешу үшін Карлеман -Веке регуляризация әдісі қолданылады.

(4) –(5) шектік есептің $v(x,t)$ шешімі (6) формуласы арқылы анықталады, ал бастапқы шекаралық (1) –(2) есептің шешімін келесі түрде анықтаймыз:

$$u(x,t)=\int\limits_0^x v(\xi,t)d\xi, \tag{18}$$

мұндағы $v(x,t)=v_{\text{hom}}(x,t)+v_{part}(x,t)$, ал

$$v_{\text{hom}}(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\left[-\exp\left\{-\frac{(x+t^{2\omega})}{4a^2(t-\tau)}\right\}+\exp\left\{-\frac{(x-t^{2\omega})}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right]}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\cdot\varphi_0\left(\tau\right)d\tau \tag{19}$$

$$v_{part}(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\left[\exp\left\{-\frac{(x-t^{2\omega})}{4a^2(t-\tau)}\right\}-\exp\left\{-\frac{(x+t^{2\omega})}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right]\cdot\varphi_{part}\left(\tau\right)d\tau+$$
$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}-\exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right]\cdot\tilde{f}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}v_0(\tau)d\tau, \tag{20}$$

мұндағы $t^{\frac{3}{2}-\omega}\cdot\varphi(t)$ және $t^{\frac{3}{2}-\omega}\cdot\tilde{f}(x,t)$ функциялары сәйкесінше R_+ және Q үзіліссіз және шенелген болып табылады.

Сонымен, бастапқы (1)-(2) шеттік есептер үшін келесі теорема дұрыс.

Теорема 2 *Кез -келген* $f(t)\in L_\infty\left(R_+;\ \ t^{\frac{3}{2}-\omega}\exp\left\{\frac{t^\omega}{4a^2}\right\}\right)$ *оң бөлігі үшін және берілген* $f(x,t)\in W_\infty^{1,0}\left(G;t^{\frac{3}{2}-\omega}\exp\left\{\frac{t^{2\omega}}{4a^2}\right\}\right)$, $u_0(t)\in L_\infty(R_+;t^{\omega-\frac{3}{2}})$; $u_1(t)\in L_\infty(R_+;\ \ t^{\frac{3}{2}-\omega})$ *функциялары үшін* (1) – (2) *шекаралық есептің шешімі бар* $u(x,t)\in L_\infty\left(G;\left(x+t^{\frac{3}{2}-\omega}\right)^{-1}\right)$ *және* (18) – (20) *формулалар арқылы анықталады.*

1.2 бөлімшеде, алдыңғы 1.1 бөлімшедегі жылу өткізгіштік теңдеуінің сол шекаралық есебі қарастырылған. Айырмашылығы облыс шекарасы еркін $x=\gamma(t)$ заңдылығымен қозғалады, ал алдыңғы бөлімшеде шекарасы дәрежелік заңдылықпен қозғалады. Екі есептің де зерттелуі бірдей тәртіппен жүргізіледі, бірақ шекарасы дәрежелік заңдылықпен қозғалғандағы жағдайда шешу әдісі айқын байқалады. Сондықтан да, бұл екі жағдай әдістемелік тұрғыдан бірін -бірі толықтырып тұруы, шыққан нәтижелерді бөлек қарастыруға негіз болды.

$G=\{x,t|0<x<\gamma(t),t>0\}$ облысында келесі шекаралық есептің шешімін қарастырамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f\left(x,t\right),\quad\{0<x<\gamma(t),\ t>0\} \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=u_0(t),\quad\frac{d\tilde{u}(t)}{dt}+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\gamma(t)}=u_1(t), \tag{22}$$

мұнда $\tilde{u}(t)=u(\gamma(t),t),\ \ \gamma(0)=0$, ал $\gamma(t)=[t(1+\alpha_0(t))]^{\omega}, \quad \omega>\frac{1}{2}$

$\gamma(t):(0,\infty)\to(0,\infty)$ функциясы келесі шарттарды қанағаттандырады:

1. $t\to 0$ және $t\to\infty$ $\gamma(t)$ функциясының асимптотикасының бейнесі t^{ω}, мұнда $\omega>\frac{1}{2}$

2. қандайда бір t_1^* уақыт мезетінен бастап t_2^* уақыт мезетіне дейін $\gamma(t)$ функциясы еркін, қатаң бірсарынды және өзара бірмәнді, яғни кері түрлендіруі $\gamma^{-1}(t)$ бар.

Шешімінің және берілген функцияларының класын келесі түрде енгіземіз:

$$(x+[\gamma(t)]^{\frac{3}{2\omega}-1})^{-1}u(x,t)\in L_\infty(G),\ \text{т.е.}\quad u(x,t)\in L_\infty(G;(x+[\gamma(t)]^{3/2\omega-1})^{-1}),$$

$$f(x,t)\in W_\infty^{1,0}\left(G;[\gamma(t)]^{3/2\omega-1}\exp\left\{[\gamma(t)]^{\frac{2\omega-1}{\omega}}/(4a^2)\right\}\right);$$
$$u_0(t)\in L_\infty\left(R_+;[\gamma(t)]^{-(3/2\omega-1)}\right);\ \ u_1(t)\in L_\infty\left(R_+;[\gamma(t)]^{3/2\omega-1}\right). \quad (23)$$

Бастапқы шекаралық (21) –(22) есептің шешімін келесі түрде анықтаймыз:

$$u(x,t)=\int\limits_0^x v(\xi,t)d\xi, \quad (24)$$

мұнда $v(x,t)=v_{\text{hom}}(x,t)+v_{part}(x,t)$, ал

$$v_{\text{hom}}(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\left[-\exp\left\{-\frac{(x+\gamma(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}+\exp\left\{-\frac{(x-\gamma(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right]\cdot\varphi_0\left(\tau\right)d\tau \quad (25)$$

$$v_{part}(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\left[\exp\left\{-\frac{(x-\gamma(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}-\exp\left\{-\frac{(x+\gamma(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right]\cdot\varphi_{part}\left(\tau\right)d\tau+$$
$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}-\exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right]\cdot\tilde{f}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}v_0(\tau)d\tau. \quad (26)$$

мұндағы $(\gamma(t))^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\cdot\varphi(t)$ және $(\gamma(t))^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\cdot\tilde{f}(x,t)$ функциялары сәйкесінше R_+ және Q үзіліссіз және шенелген болып табылады.

(21)-(22) шекаралық есептер үшін келесі теорема дұрыс.

Теорема 3 *Кез -келген* $f(t)\in L_\infty\left(\mathrm{R}_+;\ [\gamma(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\exp\{\gamma(t)/(4a^2)\}\right)$ *оң бөлігі үшін және* $f(x,t)\in W_\infty^{1,0}\left(G;[\gamma(t)]^{3/2\omega-1}\exp\left\{[\gamma(t)]^{\frac{2\omega-1}{\omega}}/(4a^2)\right\}\right)$, $u_0(t)\in L_\infty(R_+;[\gamma(t)]^{\frac{\omega-3/2}{\omega}})$; $u_1(t)\in L_\infty(\mathrm{R}_+;\ [\gamma(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}})$ *берілген функциялары үшін* (21) – (22) *шекаралық есептің шешімі бар* $u(x,t)\in L_\infty(G;\left(x+[\gamma(t)]^{3/2\omega-1}\right)^{-1})$ *және* (24) – (26) *формулалар арқылы анықталады.*

Жұмыстың **екінші бөлімінде** төңкерілген конустағы кеңістік айнымалылары бойынша екі өлшемді $Q=\left\{(x,y,t)|\ \sqrt{x^2+y^2}<t,\ 0<t<1\right\}$ шекаралық есепті қарастырамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\triangle u=f(x,y,t), \quad (27)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\bigg|_{\sqrt{x^2+y^2}=t} = g(x,y,t), \tag{28}$$

мұнда $\tilde{u}(t,\alpha) = u(x,y,t)|_{\sqrt{x^2+y^2}=t}$

Осьтік симметрия шарты орындалады деп болжап және (27)–(28) үшін цилиндрлік координаттарға көшіп, $G = \{(r,t)|\ 0 < r < t,\ 0 < t < 1\}$ облысында келесі шекаралық есепті аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = f(r,t), \tag{29}$$

$$\left(2\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\bigg|_{r=t} = g(t), \quad u(r,t) \neq \infty \quad\quad r \to 0. \tag{30}$$

Мұнда (28) шекаралық шарты (30) шартына ауысады. Жаңа функция енгізу арқылы:

$$w(r,t) = r\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}w(r,t)\right), \tag{31}$$

(29) - (30) есебі , келесі есепке түрленеді:

$Q = \{(r,t)|0 < r < t, 0 < t < 1\}$ облысында анықталған

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - a^2\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + r\frac{\partial}{\partial r}f(r,t) \tag{32}$$

теңдеуді және келесі шекаралық шарттарды қанағаттандыратын:

$$\begin{cases} \left\{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{2}{a^2}\dfrac{1}{r}w\right\}\bigg|_{r=t} = g(t) - \dfrac{1}{a^2}f(t,t) = g_1(t), \\ \hfill w(r,t)|_{r=0} = g_2(t) \end{cases} \tag{33}$$

шешімін табу керек.

Белгілі болған,

$$G\left(r,\xi,t-\tau\right) = \frac{r}{2a\left(t-\tau\right)}\exp\left(-\frac{r^2+\xi^2}{4a^2\left(t-\tau\right)}\right)I_1\left(\frac{r\xi}{2a^2\left(t-\tau\right)}\right)$$

функциясы (32) теңдеуі үшін фундаментальді шешім болып табылады, мұнда ξ- параметр, ал $I_1(z)$ - функциясын осыдан әрі 1 ретті модификацияланған Бессель функциясы деп қабылдаймыз.

(32) - (33) есебінің шешімін жай, қос қабатты және көлемді жылу потенциалдарының қосындысы түрінде іздейміз, яғни:

$$w(r,t) = \int_0^t G\left(r,\xi,t-\tau\right)|_{\xi=\tau}\mu(\tau)d\tau + \int_0^t \frac{\partial G(r,\xi,t-\tau)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0}\nu(\tau)d\tau + W(r,t,f), \tag{34}$$

мұнда

$$W(r,t,f) = \int_0^t d\tau\int_0^\tau G(r,\xi,t-\tau)r\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial r}d\xi \tag{35}$$

- көлемді жылу потенциалы. (34) теңдеуіндегі $\mu(t)$ және $\nu(t)$ - функциялары әзірше белгісіз потенциалдар тығыздығы болып табылады.

(32) теңдеуінің (34) түріндегі шешіміне тиісті қатынастарды қойып, шешімінің интегралдық көрінісін табамыз.:

$$w(r,t) = \int_0^t \frac{r}{2a^2\left(t-\tau\right)}\exp\left(-\frac{r^2+\tau^2}{4a^2\left(t-\tau\right)}\right)I_1\left(\frac{r\tau}{2a^2\left(t-\tau\right)}\right)\mu(\tau)d\tau +$$
$$+\int_0^t \frac{r^2}{8a^4(t-\tau)^2}\exp\left(-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\nu(\tau)d\tau + W(r,t,f). \tag{36}$$

Шекаралық шарттарды қанағаттандыра отырып, келесі интегралдық теңдеуді аламыз:

$$\mu_1(t) + \int_0^t \frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)^2}\widetilde{I_{01}}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\mu_1(\tau)d\tau + \\ + \int_0^t \frac{3}{2a^2}\frac{t}{t-\tau}\widetilde{I}_1\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\mu_1(\tau)d\tau = 2a^2\mathcal{F}_1(t), \quad (37)$$

мұнда

$$\mathcal{F}_1(t) = -\left.\frac{\partial W(r,t)}{\partial r}\right|_{r=t} - \frac{2}{a^2}\left.W(r,t)\right|_{r=t} - \left.\frac{\partial \widetilde{g}_2(r,t)}{\partial r}\right|_{r=t} - \frac{2}{a^2}\left.\widetilde{g}_2(r,t)\right|_{r=t} - \frac{1}{a^2}tf(t,t) + g(t),$$

$$\widetilde{I}_1\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) = \exp\left(-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)I_1\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right),$$

$$\widetilde{I_{01}}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) = \exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\left[I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) - I_1\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\right],$$

$$\exp\left(\frac{\tau}{4a^2}\right)\mu(\tau) = \mu_1(\tau),$$

$$\mu_2(t) = t\mu_1(t),$$

деп жаңа функция енгізсек, онда (37) келесі түрде жазылады:

$$\mu_2(t) + \int_0^t M(t,\tau)\mu_2(\tau)d\tau = 2a^2t\mathcal{F}_1(t), \quad (38)$$

мұнда

$$M(t,\tau) = M_1(t,\tau) + M_2(t,\tau), \quad (39)$$

ал

$$M_1(t,\tau) = \frac{t^2}{2a^2(t-\tau)^2}\widetilde{I_{01}}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right),$$

$$M_2(t,\tau) = \frac{3}{2a^2}\frac{t^2}{\tau(t-\tau)}\widetilde{I}_1\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right),$$

(39) ядросының келесі қасиетіне байланысты, (38) интегралдық теңдеуіне біртіндеп жуықтау әдісі қолданылмайды.

Ескерту 2 $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^t M(t,\tau)d\tau = 1$, *при этом*

$$\int_0^t M_1(t,\tau)d\tau = 1, \ \ \forall t>0, \qquad lim_{t\to 0}\int_0^t M_2(t,\tau)d\tau = 0.$$

Біз 2 ескертуге байланысты (38) теңдеуіне сипаттамалық теңдеу болатын келесі "қысқартылған" интегралдық теңдеудің шешімін іздейміз:

$$\mu_2(t) + \int_0^t \frac{t^2}{2a^2(t-\tau)^2}\widetilde{I_{01}}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\mu_2(\tau)d\tau = 2a^2t\mathcal{F}_1(t). \quad (40)$$

(40) интегралдық теңдеуінде тәуелсіз анымалыларды $t = \frac{1}{t_1}$, $\tau = \frac{1}{\tau_1}$ алмастыру арқылы және

$$\mu_2\left(\frac{1}{t_1}\right) = \mu_2(t_1), \quad 2a^2\frac{1}{t_1}\mathcal{F}_1\left(\frac{1}{t_1}\right) = \mathcal{F}_2(t_1)$$

функцияларын енгізу арқылы:

$$\mu_2(t_1) + \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{2a^2(\tau_1 - t_1)^2} \widetilde{I_{01}} \left(\frac{1}{2a^2(\tau_1 - t_1)} \right) \mu_2(\tau_1) d\tau_1 = \mathcal{F}_2(t_1), \tag{41}$$

теңдеуін аламыз. Бұл айырымды ядролы теңдеуді келесі ықшамды түрде жазып алып, Лаплас түрлендіруін қолдансақ:

$$\mu_2(t_1) + \int_{t_1}^{\infty} M_{1-}\left(t_1 - \tau_1\right) \mu_2(\tau_1) d\tau_1 = \mathcal{F}_2(t_1), \tag{42}$$

мұнда

$$M_{1-}\left(t_1 - \tau_1\right) = \frac{1}{2a^2(\tau_1 - t_1)^2} \widetilde{I_{01}} \left(\frac{1}{2a^2(\tau_1 - t_1)} \right), \tag{43}$$

онда (42) теңдеуінің шешімі келесі түрде жазылады:

$$\mu_2(t_1) = \mathcal{F}_2(t_1) + \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\sigma - \imath\infty}^{\sigma + \imath\infty} \widehat{R_{-}^{*}}(-p) \mathcal{F}_2(p) dp, \quad Rep < 0 \tag{44}$$

мұнда

$$\widehat{R_{-}^{*}}(-p) = \frac{1 - 2\frac{\sqrt{-p}}{a} I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) K_1\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)}{2\frac{\sqrt{-p}}{a} I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) K_1\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)}. \tag{45}$$

Ендеше (42) теңдеуінің шешімі келесі түрде болады

$$\mu_2(t_1) = \mathcal{F}_2(t_1) - \int_{t_1}^{\infty} R_{-}(t_1 - \tau_1) \mu_2(\tau_1) d\tau_1,$$

мұнда

$$\widehat{R_{-}^{*}}(-p) \risingdotseq R_{-}(t_1) = \frac{2a^2}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{t_1}} \sum_{k=1}^{\infty} B_k + \frac{2a^4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k B_k \exp\left(-\alpha_k^2 a^4 t_1\right) -$$
$$- \frac{2a^2}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{t_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_1(\alpha_k)}{J_1(\alpha_k)} B_k \int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\alpha_k^2 a^4 t_1}\right) \sin\xi d\xi, \tag{46}$$

ал $\{\}$

Лемма 2 $R_{-}(t_1)$ *резольвентасы үшін келесі бағалау дұрыс:*

$$R_{-}(t_1) \leq C \cdot \frac{1}{\sqrt{t_1}}, \quad t_1 > 0.$$

Сипаттаушы теңдеудің шешімі келесі түрде болады:

$$\mu_2(t) = 2a^2 t \mathcal{F}_1(t) - \int\limits_0^t \widetilde{R}(t,\tau) \mathcal{F}_1(\tau) d\tau$$

мұнда

$$\widetilde{R}(t,\tau) \leq C \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}}.$$

(37) «толық» интегралдық теңдеуінің шешу үшін

$$\mu_2(t) + \int\limits_0^t \frac{t^2}{2a^2(t-\tau)^2}\widetilde{I_{01}}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\mu_2(\tau)d\tau =$$

$$= -\int\limits_0^t \frac{3}{2a^2}\frac{t^2}{\tau(t-\tau)}\exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)I_1\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\mu_2(\tau)d\tau + 2a^2t\cdot\mathcal{F}_1(t), \quad (47)$$

сипаттаушы теңдеудің шешіміне регулиризация әдісін, яғни Карлеман –Векуе әдісін қолданамыз.

Сонымен келесі теорема орынды.

Теорема 4 *Егер* $\sqrt{t}g_1(t) \in L_\infty(0,1)$ *және* $g_2(t) \in L_\infty(0,1)$ *шарттары орындалса, онда (32)-(33) шекаралық есептің жалғыз шешімі болады* $w(r,t) \in L_\infty(G)$.

4 теоремасынан және (36) теңдігінен негізгі шешімді аламыз.

Теорема 5 *Егер* $\sqrt{t}g(t) \in L_\infty(0,1)$ *болса, онда (29)-(30) шекаралық есептің жалғыз гана шешімі болады* $u(r,t) \in L_\infty(G)$.

Қорытындыда диссертациялық зерттеу жұмысының қысқаша нәтижелері жазылған.

Диссертациялық жұмыс пайдаланылған әдебиеттер тізімімен, осы зерттеу жұмысына қатысты жарияланған мақалалар тізімі келтірілген А қосымшасымен аяқталады.