

СУЛЕЙМБЕКОВА АЙНАШ ОСПАНОВНА

**СУЩЕСТВОВАНИЕ, КОМПАКТНОСТЬ И ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ
ЧИСЕЛ РЕЗОЛЬВЕНТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА**

АННОТАЦИЯ

**Диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по
образовательной программе «8D05401-Математика»**

Актуальность темы. В последнее время обширно развивается общая теория граничных задач для дифференциальных уравнений нечетного порядка с частными производными, причины такого развития которых: дифференциальные уравнения нечетного порядка часто используются в гидромеханике, электродинамике, теории твердых тел и волн физики.

Одним из представителей дифференциальных уравнений в частных производных нечетного порядка являются дифференциальные уравнения третьего.

Уравнения в частных производных третьего порядка лежат в основе математических моделей многих явлений и процессов. В частности, в эту группу входит нелинейное уравнение Кортевега-де Фриза, являющееся основным уравнением современной математической физики. Это уравнение впервые встречается в работах Ж.Буссинеского. Но окончательные исследования были проведены в 1895 году. Д. Кортевегом и Г. де-Фрисом. Дальнейшие исследования этого уравнения проводились многими известными учеными. Последние результаты и полные описания предоставлены в работах R. Temam, T. Kato, J.Y. Bona, R. Smith, Дж. Уизема и других ученых.

В большинстве работ для изучения решений нелинейных уравнений сначала исследуют его линеаризованный вид. Основной особенностью данного метода, в отличие от других методов, является в нашем случае следующий подход: сперва доказывают вопросы о существовании обратного оператора, гладкости элементов из области определения оператора и о компактности множества, связанного с областью определения линеаризованного оператора. Затем, эти полученные результаты в дальнейшем используются для изучения свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Исследование уравнения в частных производных нечетного порядка, включая линеаризованную форму уравнений Кортевега-де Фриза рассмотрены в работах R. Temam, T.Kato, J.Y. Bona, R. Smith, Дж. Уизема, A. Villanueva, E. Taflin, Y. Turbal, Chunxiong Zheng и других ученых. В этих работах рассматривались различные граничные задачи для дифференциальных уравнений, коэффициенты которых постоянны или непрерывны и рост которых ограничен.

Однако в ряде случаев при использовании дифференциальных уравнений нечетного порядка приходится рассматривать задачи в неограниченной области. Например, в электродинамике, квантовой физике, явлениях, описывающих распространение волн, необходимо знать свойства решений дифференциальных уравнений, у которых коэффициенты нечетного порядка бесконечно возрастают. Поэтому для линейных дифференциальных операторов нечетного порядка в случае неограниченной области с сильно растущими коэффициентами, важны следующие задачи:

- замыкаемость оператора;
- существование резольвенты;
- максимальная гладкость функций из области определения линейризованного оператора Кортевега-де Фриза (разделимость оператора);
- компактность резольвенты линейризованного оператора Кортевега-де Фриза;
- спектральные свойства линейного дифференциального оператора типа Кортевега-де Фриза, т.е. оценки сингулярных и собственных чисел.

Методы изучения дифференциальных операторов нечетного порядка имеют свои особенности по сравнению с дифференциальными операторами четного порядка. Например, дифференциальные операторы нечетного порядка в пространстве L_2 не являются полуограниченными, т. е. не выполняется условие: $\langle Lu, u \rangle \geq \gamma \cdot \|u\|_2^2$, где L - дифференциальный оператор, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение в пространстве L_2 , $\|\cdot\|_2$ - норма, γ - любое конечное действительное число. Невыполнение этого условия затрудняет изучение дифференциальных свойств функций из области определения дифференциального оператора нечетного порядка.

Поэтому отметим, что решение поставленных выше задач для дифференциальных операторов нечетного порядка очень важно с научной точки зрения.

Просматривая литературу, мы видим, что существование, делимость, спектральные и аппроксимативные свойства резольвенты линейризованного дифференциального оператора Кортевега-де Фриза, коэффициенты которого бесконечно растут в неограниченной области, изучены недостаточно. Поэтому представляется важным и актуальным изучение указанных выше вопросов в науке и практике для линейризованного оператора Кортевега-де Фриза с сингулярными коэффициентами.

В работе вместе с оператором Кортевега-де Фриза рассматривается параболический дифференциальный оператор, часто встречающийся в математической физике. Частная производная по времени от этого оператора имеет нечетный порядок. Поэтому существование резольвенты и делимость этого дифференциального оператора, коэффициент которого неограниченно возрастает в неограниченной области, является очень важной проблемой, требующей глубокого исследования.

Цель работы. В работе исследуются существование резольвенты, компактность, делимость и спектральные свойства дифференциальных операторов в частных производных нечетного порядка, коэффициенты которых неограниченно растут в бесконечной области.

Задачи исследования.

- найти условия существования резольвенты линеаризованного дифференциального оператора Котевега-де Фриза, коэффициенты которого неограниченно возрастают в бесконечной области;

- найти условия делимости линеаризованного дифференциального оператора Котевега-де Фриза, коэффициенты которого неограниченно возрастают в бесконечной области;

- найти необходимые и достаточные условия, свидетельствующие о компактности резольвенты линеаризованного дифференциального оператора Котевега-де Фриза, коэффициенты которого неограниченно растут в бесконечной области;

- исследовать спектральные свойства выше указанного дифференциального оператора третьего порядка, коэффициенты которого неограниченно растут в бесконечной области.

Объект исследования. Существование и компактность резольвенты линеаризованного сингулярного дифференциального оператора Котевега-де Фриза, а также существование резольвенты и делимость и спектральные свойства параболического дифференциального оператора в случае неограниченной области с сильно растущими коэффициентами.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались метод локализации, метод априорных оценок, преобразования Фурье, линейные операторные методы, теории весовых функциональных пространств, метод компактности.

Научная новизна. В работе получены следующие новые научные результаты:

- Для одного класса линеаризованных дифференциальных операторов Котевега де Фриза, коэффициенты которых бесконечно растут на бесконечности в бесконечной области, были получены следующие результаты:

а) найдены условия существования резольвенты для коэффициентов;

б) получены условия делимости линеаризованного оператора Котевега-де-Фриза;

в) найдены необходимые и достаточные условия, свидетельствующие о компактности резольвенты линеаризованного дифференциального оператора Котевега-де Фриза;

г) получена двусторонняя оценка сингулярных чисел (s -числа) резольвенты линеаризованного оператора Котевега де Фриза. Следовательно, можно оценивать собственные значения оператора сверху, то есть эти найденные значения открывают прямой путь к приближенным решениям.

В работе, также доказано

- существование обратного оператора для одного класса параболических дифференциальных операторов с бесконечно растущими коэффициентами.

- найдено условие обеспечивающее разделимость дифференциального оператора параболического типа в случае неограниченной области с сильно растущим коэффициентом.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. В этой работе научные результаты носят теоретический характер. Научные выводы, полученные в работе, могут быть использованы при глубоком изучении качественных свойств резольвенты дифференциальных операторов нечетного порядка. В частности, их можно использовать для изучения существования, компактности и спектральных свойств резольвенты дифференциальных операторов нечетного порядка в бесконечной области.

Найденные научные результаты могут быть использованы студентами, магистрантами и докторантами в специальных курсах по уравнениям дифференциальной и математической физики.

Апробация полученных результатов. Основные результаты работы были представлены в следующих конференциях:

1. Традиционная международная научная апрельская конференция, посвященная Дню работников науки. Институт математики и математического моделирования. Алматы, 2018, 2020, 2021 гг.

2. Международная конференция «Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики». Караганда, 2019.

3. IV Международная научная конференция "Актуальные проблемы теории оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений". Б.Н. Кыргызско-Российский Славянский университет имени Ельцина. Бишкек. 2022 год.

Также, индивидуальные результаты работы были обсуждены в следующих семинарах:

- Научный семинар «Функциональный анализ и его применение» (руководители академики НАН РК М. Отелбаев и Р. Ойнаров, профессора Е.Д. Нурсултанов, К.Н. Оспанов).

- Научный семинар кафедры «Основная математика». Нур-Султан, 2020.

- Научный семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов» под руководством профессора кафедры Математика в образовании, Таразского Регионального университета имени М.Х.Дулати.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 научных статьях и материалах конференций, в том числе 3 статьи в изданиях, рекомендованных уполномоченным органом, 1 статья в рейтинговом издании, включенном в базу данных Scopus, 1 статья в зарубежных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех частей (каждая часть разбита на параграфы), заключения и списка использованной литературы.

Ключевые слова. Дифференциальный оператор нечетного порядка, уравнение Кортвега-де Фриза, резольвента, оператор деления, сингулярные числа.