

REVIEW

On the Thesis of Zhomart Onerbek

«The boundedness and compactness of some operators in Morrey type spaces with variable exponents»

presented for the degree Doctor of Philosophy (PhD),
speciality 6D060100 – «Mathematics»

In this dissertation work, the questions of the boundedness of classical integral operators: the Hardy-Littlewood maximal function, the fractional-maximal function, the Riesz potential and the Calderón-Zygmund singular integral operators and their commutators, in general Morrey-type spaces with variable exponents, have been considered. Such questions in the case of general Morrey-type spaces with constant exponents $GM_{p(\cdot),\theta(\cdot),w(\cdot)}(R^n)$ have been previously considered in the works of Guliyev V., Burenkov V.I., Gogatishvili A. and others. Questions of boundedness of the above operators for generalized spaces of Morrey type c spaces $M_{p(\cdot),w(\cdot)}(\Omega)$ with a variable exponent $p(\cdot)$, have been considered by Guliyev V., Samko S.

In this dissertation, the author introduces the definition of global Morrey-type spaces $GM_{p(\cdot),\theta(\cdot),w(\cdot)}(\Omega)$ with variable exponents $p(\cdot)$, $\theta(\cdot)$, where $\Omega \subset R^n$ is an unbounded domain and studies the Boundedness of several integral operators: the maximal Hardy-Littlewood function, the fractional-maximal function, the Riesz potential, and the Calderón-Zygmund singular integral operators and their commutators in these spaces.

The work consists of two sections. In the first section, the author obtains conditions on the exponents (p_1, p_2) , (θ_1, θ_2) and on the weight functions (w_1, w_2) , under which the maximum Hardy-Littlewood function, the Riesz potential, and the Calderon-Zygmund singular integral operator are bounded from $GM_{p_1(\cdot),\theta_1(\cdot),w_1(\cdot)}$ to $GM_{p_2(\cdot),\theta_2(\cdot),w_2(\cdot)}$. For example, in Section 1.3 the following theorem was obtained.

Theorem. Let $p(\cdot) \in \mathbb{P}_\infty^{\log}(\Omega)$ and the constant number $\alpha > 0$, $(\alpha p(\cdot))_+ = \sup_{x \in \Omega} \alpha p(x) < n$, $\theta_1(r)$ and $\theta_2(r)$ be measurable functions on R_+ , there exists a positive number a , such that, for all $r > a$ holds $\theta_1(r) = \bar{\theta}_1 = \text{const}$, $\theta_2(r) = \bar{\theta}_2 = \text{const}$ and $1 < \theta_1 \leq \bar{\theta}_1(r) \leq \theta_2(r) \leq \theta_2 < \infty$ always everywhere, $p_1(x)$ and $p_2(x)$ satisfy the condition $\frac{1}{p_2(x)} = \frac{1}{p_1(x)} - \frac{\alpha}{n}$, w_1 and w_2 satisfy the condition

$$T = \sup_{x \in \Omega, t > 0} \int_0^t (w_2(x, r))^{\theta_2(r)} \left(\int_t^\infty \left(\frac{s^{\alpha-1}}{w_1(x, s)} \right) (\bar{\theta}_1(r))' ds \right)^{\frac{\theta_2(r)}{[\bar{\theta}_1(r)]'}} dr < \infty. \quad (1.3.9)$$

Then the Riesz potential I^α is bounded from $GM_{p_1(\cdot), \theta_1(\cdot), w_1(\cdot)}(\Omega)$ to $GM_{p_2(\cdot), \theta_2(\cdot), w_2(\cdot)}(\Omega)$.

The second section deals with study the boundedness of the commutators of these operators in global Morrey type spaces. For example, the author proves the following theorem on the boundedness of the commutator of the Calderón-Zygmund singular integral T in paragraph 2.2.

Theorem. Let $p \in P_\infty^{log}(\Omega)$ and $\theta_1(r), \theta_2(r)$ be measurable functions on R_+ , such that, there exists a positive number a , such that, for all $r > a$ holds $\theta_1(r) = \bar{\theta}_1 = \text{const}$, $\theta_2(r) = \bar{\theta}_2 = \text{const}$ and $1 < \theta_1 \leq \bar{\theta}_1(r) \leq \theta_2(r) \leq \theta_2 < \infty$ always everywhere, . If the measurable functions $w_1(x, r)$ and $w_2(x, r)$ satisfy the condition

$$\sup_{x \in \Omega, t > 0} \int_0^t \left(\frac{w_2(x, r)}{r} \right)^{\theta_2(r)} \left(\int_t^\infty \left(\frac{1}{w_1(x, s)} \right)^{\bar{\theta}_1(r)} ds \right)^{\frac{\theta_2(r)}{[\bar{\theta}_1(r)]'}} dr < \infty$$

then the commutator $[b, T]$ is bounded from $GM_{p(\cdot), \theta_1(\cdot), w_1(\cdot)}(\Omega)$ to $GM_{p(\cdot), \theta_2(\cdot), w_2(\cdot)}(\Omega)$.

In addition, in Subsection 2.3 is presented the compactness conditions for sets in generalized Morrey-type spaces with variable exponent. With its help

in Subsection 2.4, the theorem on the compactness of the commutator of the Riesz potential in generalized Morrey-type spaces with variable exponent was obtained.

The results obtained in this thesis are continuations of earlier investigations of V. Guliyev, Samko, J. Hasanov Mustafaev, X. Badalov and others. Overall, the author has obtained some new and interesting results in the theory Morrey type spaces with variable exponents in his dissertation.

Let me clarify that I could examime Zhomart Onerbek's results by reading the material in English language that he has submitted to me, but that I could not read the version in Kazakh of his dissertation because I do not speak the Kazakh language. But in all cases, I do believe that the results of Zhomart Onerbek meet all the necessary requirements and that the candidate deserves the degree of Doctor PhD.

Foreign supervisor

Doctor PhD, Professor at the Università degli Studi di Padova'

Massimo Lanza de Cristoforis

Padova, June 06/06/2022



Өнербек Жомарттың бD060100-“Математика” мамандығы бойынша философия (PhD) докторы дәрежесін алу үшін ұсынылған

“Айнымалы көрсеткішті Морри типтес кеңістіктердегі кейбір операторлардың шенелімдігі және компактiлігі” диссертациясына

СЫН-ПІКІР

Бұл диссертациялық жұмыста классикалық интегралдық операторлардың шектеулілігінің мәселелері: Харди-Литлвуд максималды функциясы, бөлшектік-максималды функциясы, Рисс әлеуеті, Кальдерон-Зигмунд сингулярлық интегралдық операторлары мен олардың коммутаторларының, жалпы алғанда айнымалы көрсеткішті Морри типтес кеңістіктер қарастырылды.

【GM】 $(p, \theta, w(\cdot)) (R^n)$ көрсеткіштері тұрақты Морри типтес кеңістіктер жағдайындағы осындай мәселелер В.С. Гулиевтің, В.И. Буренковтың, А. Гогатишвилидің және тағы басқалардың еңбектерінде қарастырылған.

Жоғарыдағы келтірілген операторлардың $p(\cdot)$ айнымалы дәрежелерімен $M_{p(\cdot), w(\cdot)}(\Omega)$ Морри типтес жалпыланған кеңістіктердегі шенелгендік мәселелерін қарастырумен В. Гулиев, С. Самко айналысқан.

Бұл диссертацияда автор $\Omega \subset R^n$ шенелмеген облыс болып табылатын $p(\cdot), \theta(\cdot)$ айнымалы дәрежелерімен $GM_{p(\cdot), \theta(\cdot), w(\cdot)}(\Omega)$ глобальді Морри типтес кеңістіктері енгізеді және бірқатар интегралдық операторлардың шектеулілігін: Харди-Литлвуд максималды функциясын, бөлшек-максималды функциясын, Рисс әлеуетін және Кальдерон-Зигмунд сингулярлық интегралдық операторларын және осы кеңістіктердегі олардың коммутаторларын зерттейді.

Жұмыс екі бөлімнен тұрады. Бірінші бөлімде автор $(p_1, p_2), (\theta_1, \theta_2)$ дәрежелері бойынша, (w_1, w_2) және салмақ функциялары бойынша Харди-Литлвуд максималды операторы, бөлшек-максималды функциясы, Рисс потенциалы, Кальдерон-Зигмунд сингулярлық интегралы $GM_{p_1(\cdot), \theta_1(\cdot), w_1(\cdot)}$ кеңістігінен $GM_{p_2(\cdot), \theta_2(\cdot), w_2(\cdot)}$ кеңістігіне шектелуін қамтамасыз ететін шарттарды алады. Мысалы, 1.3-бөлімде келесі теорема алынған.

Теорема. Айталық $p(\cdot) \in P_\infty^{log}(\Omega)$, және тұрақты сана $\alpha > 0$, $(\alpha p(\cdot))_+ = \sup_{x \in \Omega} \alpha p(x) < n$, ал, $\theta_1(r)$ және $\theta_2(r)$ функциялары R_+ жиынында өлшемді функциялар болып, a оң саны табылып, барлық $r > a$ үшін $\theta_1(r) = \bar{\theta}_1 = const$, $\theta_2(r) = \bar{\theta}_2 = const$ және $1 < \theta_1 \leq \tilde{\theta}_1(r) \leq \theta_2(r) \leq \theta_2 < \infty$ шарттары барлық

дерлік жерде орындалсын, $p_1(x)$ және $p_2(x)$ функциялары $\frac{1}{p_2(x)} = \frac{1}{p_1(x)} - \frac{\alpha}{n}$,
 w_1 және w_2 функциялары келесі шартты қанағаттандырсын

$$T = \sup_{x \in \Omega, t > 0} \int_0^t (w_2(x, r))^{\theta_2(r)} \left(\int_t^\infty \left(\frac{s^{\alpha-1}}{w_1(x, s)} \right) (\tilde{\theta}_1(r))' ds \right)^{\frac{\theta_2(r)}{[\tilde{\theta}_1(r)]'}} dr < \infty. \quad (1.3.9)$$

Сонда Рисс әлеуеті $I^\alpha GM_{p_1(\cdot), \theta_1(\cdot), w_1(\cdot)}(\Omega)$ кеңістігінен $GM_{p_2(\cdot), \theta_2(\cdot), w_2(\cdot)}(\Omega)$ кеңістігіне шенелген болады.

Екінші бөлімде осы операторлардың Морри типтес жалпыланған кеңістіктердегі шектеулілігі зерттеледі. Мысалы, 2.2-параграфта автор Кальдерон-Зигмунд сингулярлық интегралдық операторының коммутаторының шенелгендігі туралы теореманы дәлелдейді.

Теорема. Айталық $p \in P_\infty^{log}(\Omega)$, $\theta_1(r)$ және $\theta_2(r)$ функциялары R_+ жиынында өлшемді функциялар болып, a оң саны табылып, барлық $r > a$ үшін $\theta_1(r) = \bar{\theta}_1 = const$, $\theta_2(r) = \bar{\theta}_2 = const$ және $1 < \theta_1 \leq \tilde{\theta}_1(r) \leq \theta_2(r) \leq \theta_2 < \infty$ шарттары барлық дерлік жерде орындалсын. Егер $w_1(x, r)$ және $w_2(x, r)$ өлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырса,

$$\sup_{x \in \Omega, t > 0} \int_0^t \left(\frac{w_2(x, r)}{r} \right)^{\theta_2(r)} \left(\int_t^\infty \left(\frac{1}{w_1(x, s)} \right) (\tilde{\theta}_1(r))' ds \right)^{\frac{\theta_2(r)}{[\tilde{\theta}_1(r)]'}} dr < \infty.$$

онда $[b, T]$ коммутаторы $GM_{p(\cdot), \theta_1(\cdot), w_1(\cdot)}(\Omega)$ кеңістігінен $GM_{p(\cdot), \theta_2(\cdot), w_2(\cdot)}(\Omega)$ кеңістігіне шенелген болады.

2.3-бөлімшеде айнымалы дәрежесімен жалпыланған Морри типтес кеңістіктердегі жиындардың компактiлігі туралы теорема алынған.

2.4-бөлімшеде айнымалы дәрежесімен жалпыланған Морри типтес кеңістіктердегі Рисс әлеуеті коммутаторының компактiлігі туралы теоремасы алынған.

Осы диссертацияда алынған нәтижелер В. Гулиевтің, С. Самконың, Ж. Хасановтың, А. Мустафаевтың, Х. Бадаловтың ертеректегі зерттеулерінің жалғасы болып табылады. Қорыта келгенде, автор бұл диссертациялық

жұмыста айнымалы дәрежелерімен Морри типтес кеңістіктер теориясында жаңа және қызықты нәтижелерге қол жеткізді.

Нақтылай кететін жәйт, менің Жомарт Өнербектің алған нәтижелерін ол маған ұсынған ағылшын тіліндегі материалды оқи отырып саралағаным, себебі мен қазақ тілін білмегендіктен, диссертацияның қазақ тілдегі нұсқасын оқи алмадым. Дегенмен, мен Жомарт Өнербектің алған нәтижелері барлық тиісті талаптарға сай келетініне сенімдімін және үміткер PhD докторы дәрежесін алуға лайықты деп есептеймін.

Шетелдік ғылыми кеңесші

PhD докторы, Degli Studi Di Padova университетінің профессоры

Массимо Ланза Де Кристофорис

Падуя қаласы, маусым, 06/06/2022 жыл /мөр: *Degli Studi Di Padova университеті, Математика кафедрасы/*

Doctor PhD, Professor at the University Degli Studi Di Padova

Massimo Lanza De Cristoforis

Переводчик: Али Джайлаубаева Алия Бериковна



Республика Казахстан, город Астана
Тринадцатое декабря две тысячи двадцать второго года

Я, Жантемирова Асель Серикбаевна, нотариус города Астана, действующий на основании лицензии №0002346, выданной Министерством юстиции Республики Казахстан 24 февраля 2009 года, свидетельствую подлинность подписи переводчика Джайлаубаевой Алии Бериковны, которая сделана в моем присутствии. Личность переводчика установлена, дееспособность и полномочия проверены.



Зарегистрировано в реестре за №2701

Взыскано: 1624 тенге

Нотариус А.С.Жантемирова



ES4502358221213200923K10904F

Нотариаттық іс-әрекеттің бірегей нөмірі / Уникальный номер нотариального действия

Прошнуро аино
Пронумеридино на
Нотариус Жагтемирова А.С.

