

КАСЫМОВА ЛАЙЛА ЖУМАЖАНОВНА

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДРОБНО-НАГРУЖЕННЫХ
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

АННОТАЦИЯ

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 6D060100 - Математика**

Актуальность темы.

На сегодняшний день нагруженные уравнения теплопроводности имеют широкое практическое применение. Кроме того, нагруженные уравнения составляют особый класс уравнений со своими специфическими задачами. Также можно отметить потребность в изучении нагруженных уравнений при исследовании некоторых обратных задач, при линеаризации нелинейных уравнений, при изучении некоторых задач оптимального управления и т.д. В последние годы расширяется объем исследований различных граничных задач для нагруженных уравнений, отличительной особенностью которых является наличие в краевых условиях или в уравнении оператора дробного интегро-дифференцирования. Интерес представляют краевые задачи для нагруженного уравнения теплопроводности, когда нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной. Такого рода задачи в настоящее время исследованы недостаточно полно.

Цель работы. Постановка и исследование разрешимости краевых задач для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности в определенных функциональных классах; сведение краевых задач к интегральным уравнениям Вольтерра с ядрами, содержащими специальные функции; исследование разрешимости полученных интегральных уравнений в зависимости как от порядка дробной производной в нагруженном слагаемом исходной краевой задачи, так и от характера поведения нагрузки.

Задачи исследования:

1. Дать постановку краевых задач для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности и описать пространства решений и заданных функций;
2. Свести поставленные краевые задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода с сингулярностями в ядре или с ядром, содержащим специальные функции;
3. Исследовать предельные случаи порядка дробной производной слагаемого с нагрузкой в уравнении теплопроводности краевой задачи;
4. Установить теоремы существования и единственности решений задач или сопутствующих интегральных уравнений в определенных функциональных классах в зависимости как от интервалов изменения порядка дробной производной в нагруженном слагаемом исходных краевых задач, так и от характера поведения нагрузки.

Объект исследования: Краевые задачи для дробно-нагруженных

уравнений теплопроводности.

Предмет исследования: разрешимость сопутствующих интегральных уравнений Вольтерра второго рода для краевых задач уравнений теплопроводности с нагруженным слагаемым в виде дробной производной.

Методика исследования. На первом этапе исследования применяется метод интегральных уравнений, при котором краевая задача сводится к решению соответствующего интегрального уравнения. Такие методы позволяют более компактно, чем дифференциальные уравнения, формулировать краевые задачи, учитывая при этом все условия задачи. К интегральному уравнению задача сводится обращением дифференциальной части. При исследовании предельных случаев порядка дробной производной в нагруженном слагаемом исходной задачи применяются методы теории пределов (предельный переход под знаком производной и/или интеграла, правило Лопиталя и др.). Далее при исследовании разрешимости интегральных уравнений в определенных функциональных классах применяются методы, основанные на оценках интегрального оператора уравнения. Поскольку ядра полученных интегральных уравнений с сингулярностями или содержат специальные функции, то применяются методы асимптотических оценок интеграла и рядов. Эти же методы применяются на заключительном этапе исследования при установлении зависимости существования и единственности решений интегральных уравнений в определенных функциональных классах от интервалов изменения порядка дробной производной в нагруженном слагаемом исходных краевых задач и от характера движения нагрузки.

Научная новизна. В уравнение краевой задачи входит нагруженное слагаемое в виде дробной производной, и в ядре возникающего интегрального уравнения содержатся специальные функции. Краевые задачи для уравнения теплопроводности с нагрузкой дробного порядка в определенных функциональных классах, а также сопутствующие им интегральные уравнения, которые исследованы, являются новыми как по их постановке, так и по методам их решения. Также имеются элементы новизны в полученных результатах. Ранее такие задачи во всей полноте не ставились и не изучались.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Результаты диссертации имеют теоретический характер. В ней разработана методика исследования ряда краевых задач для уравнения теплопроводности с нагруженным слагаемым в виде дробной производной, основанная на сведении исследуемых задач к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. Исследование разрешимости интегрального уравнения проведено с привлечением аппарата специальных функций.

Кроме того, полученные результаты могут служить определенным вкладом в теорию интегральных уравнений вольтерровского типа с особенностями ядра. Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью интегральных уравнений Вольтерра второго рода с ядрами, имеющими различного рода сингулярности.

Положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся:

1. Постановки краевых задач для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности в функциональных классах;

2. Сведение краевых задач к интегральному уравнению Вольтерра второго рода с ядром, содержащим специальные функции;

3. Исследование предельных случаев порядка дробной производной слагаемого с нагрузкой в уравнении теплопроводности краевой задачи;

4. Определение интервалов изменения порядка дробной производной в нагруженном слагаемом краевых задач, при которых справедливы теоремы существования и единственности решений интегральных уравнений, к которым сведены граничные задачи;

5. Установление условий существования и единственности решений интегральных уравнений, к которым сведены краевые задачи.

Достоверность и обоснованность проведенных исследований обеспечиваются конструктивностью разработанных и использованных методов. Вспомогательные утверждения затрагиваемых проблемных вопросов каждого раздела сформулированы в виде лемм и утверждений, и они строго доказаны, а общие – в виде теорем и их доказательства представлены в развернутом изложении.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

"Марчуковские научные чтения 2020" (МНЧ-2020), международная научная конференция, посвященная 95-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука (Академгородок, Новосибирск, Россия, 19 – 23 октября, 2020);

"Современные методы теории функций и смежные проблемы" , Воронежская зимняя математическая школа (Воронеж, Россия, 28 января – 2 февраля, 2021);

Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Тынысбека Шариповича Кальменова (ИМММ, Алматы, 2021);

на семинаре под руководством проф. Дженалиева М.Т. (ИМиММ, Алматы); на семинаре под руководством проф. Рамазанова М.И. (КарУ им. акад. Е.А. Букетова); на семинаре "Основы дробного исчисления" , проводимых проф. Псху А.В., директора ИПМА КБНЦ РАН, ГНС отдела дробного исчисления и др.

Тема диссертационного исследования соответствует приоритетному направлению развития «Научные исследования в области естественных наук», специализированное научное направление «Фундаментальные и прикладные исследования в области математики и механики». Часть результатов диссертации вошли в заключительный отчет по грантовому проекту АР08955795 «Краевые задачи для уравнения теплопроводности с нагрузкой дробного порядка» (2020-2021 гг.).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах: 2 статьи - в журнале, входящим в список Scopus, 5 статьи опубликованы в журналах, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан и 7 работ - в материалах международных научных конференций.

В работах, выполненных с соавторами, вклад каждого из соавторов является равным.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа объемом в 96 страниц состоит из следующих структурных элементов: определения, обозначения и сокращения, введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников, два приложения.

Первый раздел посвящен исследованию неоднородной краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной нагрузкой в естественных для исследования функциональных классах (нагруженное слагаемое представлено в виде дробной производной по временной переменной): постановке задачи, ее редукции к интегральному уравнению Вольтерра второго рода с помощью представления решения задачи через функцию Грина, исследованию предельных случаев для порядка дробной производной слагаемого с нагрузкой в уравнении и формулировке основного результата исследования (установление разрешимости интегрального уравнения в зависимости от порядка дробной производной в нагруженном члене в уравнении краевой задачи и характера линии, на которой задана нагрузка, при малых значениях времени).

Во втором разделе исследуются на разрешимость граничные задачи для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности в случае, нагруженное слагаемое представлено в виде дробной производной по пространственной переменной. Особенность этой задачи состоит в том, что, во-первых, нагруженный член представляется в виде дробной производной по пространственной переменной, во-вторых, порядок производной в нагруженном члене меньше порядка дифференциальной части и, в-третьих, точка нагрузки подвижна.

Количество использованных источников – 68.

Ключевые слова. Уравнение теплопроводности, краевые задачи, дробная производная, порядок дробной производной, нагруженное слагаемое, уравнение Вольтерра