

ГУЛЬМАНОВ НУРТАЙ КУДАЙБЕРГЕНОВИЧ

Граничные задачи теплопроводности в конусе с динамическими граничными условиями

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности 8D05409201-Математика

Актуальность темы. В литературе принято называть область нецилиндрической, если хотя бы одна из частей её границы движется со временем. Если границы области с изменением времени не меняют своей формы, то область называют цилиндрической. Для таких областей теория краевых задач теплопроводности достаточно хорошо развита.

На практике часто возникает необходимость исследовать процессы переноса тепла и массы в областях различной формы, границы которых изменяются с течением времени. Подобные проблемы возникают, например, при изучении процессов горения твердого топлива в ракетных двигателях, процессов разложения материалов под воздействием температуры, процессов передачи энергии от теплого грунта в атмосферу, при исследовании проблем атомной энергетики и безопасности атомных реакторов, экологии, медицины и криохирургии, естественного и искусственного процесса твердения бетона, а также при решении некоторых задач теории теплопроводности твердых тел (при тепловом ударе), тепловой защите от аэродинамического нагрева при движении космических аппаратов в плотных слоях атмосферы и др.

Также, в связи с постоянным увеличением объема использования контактной техники актуальными являются проблемы оптимального выбора параметров контактных материалов и режимов их работы. Поэтому изучение теплофизических процессов, происходящих в электрических контактах, является весьма актуальным в автоматике, приборостроении, сварочной технике, электротехнической аппаратуре и в различных устройствах, где контактные элементы служат одним из основных звеньев. Экспериментально установлено, что при размыкании контактов автоматических выключателей электрического тока, на короткое время возникает жидкометаллический мостик, существенно влияющий на эрозию материала контакта, то есть эффект стягивания осевого сечения дуги в области катода в контактное пятно.

Моделируя теплофизические свойства моста, С.Н. Харин пришел к краевой задаче, в которой в начальный момент размыкания контакта область решения отсутствует. Это повлияло на интегральное уравнение краевой задачи. Оказалось, что последовательность аппроксимаций Пикара интегрального уравнения расходится. С математической точки зрения особенность рассматриваемой задачи состоит именно в наличии подвижной границы и вырождении области решения в начальный момент времени.

В большинстве работ область, в которой ищется решение граничной задачи, в начальный момент времени не вырождается в точку. Lions J.L.

предложил при решении такого рода задач применять методику, заключающуюся в сведении нецилиндрической области в цилиндрическую. В своих работах аналогичную методику применяли Larkina N.A., Kozhanov A.I., Ferreira J., Benabidallah R., Rivera J., Munoz E., Kheloufi A., Sadallah B.K., Cherfaoui S., Kessab A., Cheblakova E.A. и другие. Имеется целый ряд работ, например: Chapko R., Johansson B.T., Vavrychuk V., Wang YF., Huang J., Wen XX., Dehbozorgi R., Nedaiasl K., где применяются численные методы решения таких задач.

Одним из удобных средств решения краевых задач теплопроводности в областях с переменными границами являются тепловые потенциалы. С их помощью краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям типа Вольтерра второго рода

$$\varphi(t) - \int_0^t K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (0.1).$$

которые не всегда решаются методом последовательных приближений. Если ядро уравнения (0.1) обладает следующим свойством: интеграл от ядра уравнения при стремлении верхнего предела к нижнему не стремится к нулю, то соответствующие интегральные уравнения нельзя решить методом последовательных приближений и в большинстве случаев соответствующие однородные интегральные уравнения имеют ненулевые решения.

Также нужно отметить, что к подобным особым интегральным уравнениям сводятся краевые задачи для спектрально-нагруженных параболических уравнений, когда линия нагрузки движется по закону $x = t^\omega$.

Как в практических приложениях, так и теоретически особый интерес вызывают краевые задачи теплопроводности в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени. К этому типу задач в общем случае не применимы классические методы математической физики, так как не удастся согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы области теплопереноса. Поэтому вопрос об исследовании краевых задач в области с вырождением в начальный момент времени является актуальным.

Цель работы – вопросы разрешимости краевых задач для уравнений теплопроводности со специальными граничными условиями в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени; решение особых интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода и исследование вопросов их разрешимости.

Задачи исследования:

- постановки новых краевых задач со специальными граничными условиями для уравнений теплопроводности в нецилиндрических областях, вырождающихся в начальный момент времени;
- описать пространство решений задач и заданных функций;
- преобразование исходных задач;
- редукция краевых задач к сингулярным интегральным уравнениям типа Вольтерра второго рода;

- решение сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода, построение резольвенты;
- решение исходных краевых задач.

Объект исследования: краевые задачи для уравнений параболического типа со специальными граничными условиями в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени.

Предмет исследования: разрешимость краевых задач для уравнений теплопроводности с производными по времени в граничных условиях в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени и решение сопутствующих особых интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Методика исследования. В работе используются: методы общей теории дифференциальных уравнений и функционального анализа; методы интегральных преобразований Лапласа и Фурье; специальные функции; функции комплексного переменного.

Научная новизна. В работе решены новые краевые задачи для уравнений теплопроводности в вырождающихся областях со специальными граничными условиями. Особенности рассматриваемых задач приводят к исследованию вопросов разрешимости сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода.

Теоретическая и практическая ценность работы. Результаты диссертации имеют теоретический характер. В ней разработана методика исследования ряда новых краевых задач для уравнений теплопроводности в вырождающихся областях. Кроме того, полученные результаты могут служить определенным вкладом в теорию интегральных уравнений вольтерровского типа с особенностями ядра, к которым сводятся исследуемые задачи.

Практическая ценность работы определяется тем, что она является полезной при изучении некоторых задач со свободными границами, например при исследовании однофазной задачи Стефана.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

- 1) разрешимость специальных краевых задач для уравнений теплопроводности в весовых функциональных классах;
- 2) эквивалентность краевых задач найденным в работе сингулярным интегральным уравнениям типа Вольтерра второго рода;
- 3) построение резольвенты сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода;
- 4) теоремы о разрешимости сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода;
- 5) теоремы о разрешимости исходных краевых задач.

Достоверность и обоснованность полученных в диссертации результатов подтверждаются конструктивностью разработанных и использованных методов. Вспомогательные утверждения сформулированы в виде лемм, а общие – в виде теорем, которые строго доказаны.

Апробация работы. По результатам диссертации были сделаны доклады на международных конференциях и на конференциях дальнего зарубежья:

- Международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа” – февраль 2021 года, Воронеж, Российская Федерация;
- Международная научно-практической конференции “Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики” – 4 июня 2021, Нур-Султан, Республика Казахстан;
- Традиционная Международная научная апрельская конференции – апрель 2021 года, Алматы, Республика Казахстан;
- VI Международная научная конференция “Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики” – декабрь 2021 года, Нальчик, Российская Федерация;
- Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки – 6-8 апреля 2022, Алматы, Казахстан;
- IX Международная научная конференция “Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры” – 24-28 мая 2022 г. Актобе, Казахстан;
- на семинаре под руководством профессора Дженалиева М.Т. (ИМиММ, Алматы, Республика Казахстан);
- на семинаре под руководством профессора Пеху А.В. (ИПМиА, Нальчик, Республика Кабардино-Балкария, Российская Федерация);
- на семинаре под руководством профессора Рамазанова М.И. (КарУ имени академика Е.А. Букетова);
- на семинаре кафедры “Математический анализ и дифференциальные уравнения” КарУ имени академика Е.А. Букетова и др.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах: 5 статей и 7 тезисов. Из них 2 статьи – в журналах с ненулевым IF, входящих в БД Scopus, 3 статьи – в журналах рекомендованных КОКСОН МНВО РК. В работах, выполненных с соавторами, основная часть выполнена диссертантом, с соавторами обсуждались постановки выбранных задач, выбор методов исследований и конечные результаты.

Тема диссертационного исследования соответствует приоритетному направлению развития «Научные исследования в области естественных наук». Работа выполнена в рамках грантовых проектов Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан №№ AP08956033, 2020–2021, AP09259780, 2021-2023.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка литературы и приложения. Нумерация формул, теорем, лемм, замечаний в разделах трехзначная, первое число означает номер раздела, второе – номер подраздела, третье – собственный номер формулы, теоремы, леммы, замечания внутри подраздела.

Количество использованных источников – 100.

Ключевые слова: нецилиндрическая область, конус, краевая задача теплопроводности, сингулярное интегральное уравнение Вольтерра, интегральные преобразования, метод регуляризации Карлемана-Векуа.