

**АСЕТОВ АЛИБЕК АСЕНОВИЧ**

**ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА В  
ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ОБЛАСТЯХ**

**АННОТАЦИЯ**

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по  
специальности 8D05409201-Математика**

**Актуальность темы.** Как известно, подходящими моделями движения жидкости в пористых средах являются нелинейные уравнения Бюргерса и их модификации. Проникновение фронта смачивания в пористую среду является классической задачей со свободной границей. Исторически первым и наиболее известным примером является модель Грина-Ампта (Green-Ampt) для потока воды в почвах. Существует огромное разнообразие ситуаций: химически реагирующие среды; деформируемые среды; эффекты капиллярности; тепло-массообмен; потоки смесей; среды со сложной структурой; загрязнение; рекультивация; заморозка грунта; производство композитных материалов и др.

В литературе принято называть область нецилиндрической, если хотя бы одна из частей её границы движется со временем. Если границы области с изменением времени не меняют своей формы, то область называют цилиндрической. Для таких областей теория краевых задач достаточно хорошо развита.

В работах Venia Y. и Sadallah B.-K. в пространствах Соболева установлена корректность граничной задачи для уравнения Бюргерса в нецилиндрической области. При этом область независимых переменных вырождалась в точку по нелинейному закону, и на границе ставились однородные условия Дирихле. В пространствах Соболева методами Фаэдо-Галеркина и априорных оценок устанавливается существование и единственность регулярного решения исследуемых граничных задач.

В работе Солонникова В.А., Фазано А. в угловой области изучается граничная задача для уравнения теплопроводности с производной по времени в граничных условиях. Там же отмечается, что случай неоднородной граничной задачи "... оказывается полезным при изучении некоторых задач со свободными границами". Например, для однофазной задачи "... Стефана при следующих предположениях: жидкая фаза с положительной температурой  $u(x,t)$  занимает отрезок  $0 < x < s(t)$ , при  $x=0$  задается положительный поток тепла, а свободная граница  $x=s(t)$  начинается у твердой стенки  $x=0$ , т.е. выполняется условие  $s(0)=0$ ". В работе Солонникова В.А., Фазано А. установлена теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой там граничной задачи в весовых гильбертовских пространствах.

Отметим, что спектр применения краевых задач для уравнений параболического типа в области с границей, изменяющейся во времени, достаточно широк. Подобного рода задачи возникают: при изучении тепловых процессов в электрических контактах, процессов экологии и медицины, при решении некоторых задач гидромеханики, термомеханики при тепловом ударе и так далее.

Обширная литература посвящена исследованию разрешимости линейных и нелинейных параболических уравнений в цилиндрических областях. Однако, что касается нелинейных граничных задач в вырождающихся нецилиндрических областях, то они изучены сравнительно мало.

Для угловых областей в лебеговых классах изучены граничные задачи теплопроводности и установлены теоремы об их разрешимости, сведением к сингулярным интегральным уравнениям Вольтерра второго рода.

Исследованы различные случаи неоднородности по границе. В этих случаях показано, что имеет место как единственная разрешимость, так и неединственная разрешимость для соответствующих граничных задач.

Поэтому исследование начально-граничных задач для уравнения Бюргерса с нелинейными и наличием производной по времени граничными условиями в областях вырождающихся в точку в начальный момент времени весьма актуально.

**Цель работы.** Вопросы разрешимости краевых задач для уравнения Бюргерса со специальными граничными условиями в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени.

**Задачи исследования:**

- постановки новых краевых задач для уравнения Бюргерса в нецилиндрических вырождающихся областях с нелинейными и наличием производной по времени граничными условиями;
- решение спектральной задач;
- постановка и решение приближенных задач;
- решение семейства вспомогательных граничных задач в четырехугольных областях (в виде трапеций);
- априорные оценки для решения задач;
- доказательство теорем единственности и существования краевых задач для уравнения Бюргерса в вырождающихся областях;
- исследование начально-граничной задачи для уравнения типа Буссинеска в нецилиндрической области.

**Объект исследования.** Краевые задачи для уравнений Бюргерса и Буссинеска с нелинейными и наличием производной по времени граничными условиями в нецилиндрических областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени.

**Предмет исследования.** Разрешимость краевых задач для уравнений Бюргерса и Буссинеска с нелинейными и наличием производной по времени

граничными условиями в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени.

**Методика исследования.** В работе используются методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, функционального анализа, метод априорных оценок, Фаэдо-Галеркина.

**Научная новизна.** В отличие от исследованных до настоящего времени задач для уравнений Бюргерса и Буссинеска, в настоящей работе предлагаются постановки и решения новых краевых задач, с нелинейными и наличием производной по времени граничными условиями для уравнений Бюргерса и Буссинеска в нецилиндрических областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени.

**Теоретическая и практическая ценность работы.** Результаты диссертации имеют теоретический характер. В ней развиваются методы априорных оценок и Фаэдо-Галеркина для исследования ряда краевых задач для уравнений Бюргерса и Буссинеска в нецилиндрических областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени.

Практическая ценность работы определяется тем, что уравнения Бюргерса, Буссинеска и их модификации являются подходящими моделями движения жидкости в пористых средах, нелинейных тепловых полей в контактных устройствах высокого напряжения, нелинейных процессов диффузии и распространения инородных включений в потоках водных и атмосферных ареалов. В последние годы граничные задачи для этих уравнений активно исследуются, так как процессы, протекающие в пористых средах, особую важность приобретают для глубокого осмысления и понимания в задачах разведки и эффективной разработки нефтяных и газовых месторождений.

**Положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся:

- 1) однозначная разрешимость в соболевских классах нелинейной граничной задачи типа Неймана для уравнения Бюргерса в прямоугольной области;
- 2) теоремы о разрешимости в соболевских классах нелинейной граничной задачи для уравнения Бюргерса в вырождающейся области, точка вырождения которой находится в начале координат;
- 3) теоремы о разрешимости нелинейной граничной задачи для уравнения Бюргерса в нелинейно вырождающейся области с производными по времени в граничных условиях;
- 4) достаточные условия корректности нелинейной краевой задачи для уравнения Бюргерса в вырождающейся области с динамическими граничными условиями;
- 5) достаточные условия однозначной слабой разрешимости граничных задач для уравнения Буссинеска в вырождающихся областях.

**Достоверность и обоснованность** проведенных исследований обеспечиваются конструктивностью разработанных и использованных методов. Вспомогательные утверждения затрагиваемых проблемных вопросов каждого раздела сформулированы в виде лемм, и они строго

доказаны, а общие – в виде теорем и их доказательства представлены в подробном изложении.

**Апробация работы.** Результаты диссертации были апробированы на международных конференциях, в том числе на конференциях дальнего зарубежья, сделаны доклады на семинарах: под руководством профессора Дженалиева М.Т. (ИМиММ, Алматы, Республика Казахстан); под руководством профессора Псху А.В. (ИПМиА, Нальчик, Республика Кабардино-Балкария, Российская Федерация); под руководством профессора Рамазанова М.И. (КарУ имени академика Е.А. Букетова); кафедры “Математический анализ и дифференциальные уравнения” КарУ имени академика Е.А. Букетова и др; на международных конференциях: “Воронежская зимняя математическая школа” – февраль 2021 года, Воронеж, Российская Федерация; Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки – 6-8 апреля 2022, Алматы, Казахстан.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах: 5 статей и 2 тезиса. Из них 1 статья – в журнале с ненулевым IF, входящим в список Scopus и 4 статьи в журналах, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан. В работах, выполненных с соавторами, основная часть выполнена диссертантом, с соавторами обсуждались постановки выбранных задач, выбор методов исследований и конечные результаты.

Тема диссертационного исследования соответствует приоритетному направлению развития «Научные исследования в области естественных наук». Работа выполнена в рамках грантового проекта Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан № AP08855372, 2020-2022 гг.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа объемом в 91 страниц состоит из введения, трех разделов, заключения, списка литературы и приложения.

**Количество использованных источников – 76.**

**Ключевые слова.** Уравнение Бюргерса, уравнение типа Буссинеска, граничные условия, вырождающаяся область, априорные оценки.